إيجاد معادلة التغير غير الخطي لمسار الليف في الصفائح المنحنية

حمدو ابراهيم، مصطفى طالب

الهندسة الميكانيكية، جامعة إدلب

الملخص

إن تصنيع ألواح مواد مركبة مقواة بالألياف بجودة عالية ذات ألياف متغيرة التوجيه مكانيًا في كل نقطة من اللوح ممكن باستخدام آلات السحب المتقدمة، وإن تغيير زاوية توجيه الليف داخل الطبقة يؤدي لإنتاج خصائص صلابة متغيرة على عكس ألواح المواد المركبة التقليدية ذات الألياف المستقيمة، تسمح لنا عملية الحياكة لألواح المواد المركبة متغيرة الصلابة بالاستفادة الكاملة من الخصائص الاتجاهية للمواد.

هناك تأثير واضح للألياف المنحنية على تحسين حمل التحنيب لألواح المواد المركبة متغيرة الصلابة ولذلك تم استعراض نموذجين للألياف المنحنية؛ الأول وهو التغير الخطي لزاوية الليف $[\pm\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})]_{\boldsymbol{ns}}$ إذ إن تغير الاتجاه يتم وفق إحداثي واحد، والثاني هو التغير غير الخطي لزاوية الألياف $[\pm\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]_{\boldsymbol{ns}}$ (مسار الانحناء الثابت) حيث يكون التغير مكانياً في كل نقطة على الصفيحة ومرتبط بالإحداثيات(x,y). لقد كان اهتمامنا بإيجاد معادلة اتجاه الليف ضمن طبقة المواد المركبة وارتباطه بإحداثيات الصفيحة المنحنية، فقد قمنا باستنتاج معادلة التغير غير الخطي لمسار الليف على صفيحة منحنية على شكل قطع ناقص، وصفيحة أسطوانية، وصفيحة مخروطية مؤلفة من طبقات مواد مركبة لأن هذا النوع من الصفائح شائع الوجود في هياكل الطائرات والصواريخ والأقمار الاصطناعية، و يقدم مجالاً أوسع في التصميم ويتيح متغيرات تصميمية، ونستطيع من خلاله دراسة التوزع الأمثل للألياف تحت تأثير حمل التحنيب على صفائح المواد المركبة المنحنية.

الكلمات المفتاحية: الصلابة المتغيرة، التغير غير الخطي لاتجاه الليف، حياكة الصفائح، الألياف الموجهة، الصفائح الهجينة.

Finding Nonlinear Variation Equation of Fiber Path in Curved Laminates

Hamdo Ebrhim, Mostafa Taleb

Mechanical Engineering, Idleb University

Abstract:

It is possible to manufacture high quality reinforced composite laminates using advanced steering machines. The variation of fiber angle orientation inside plies results in variable stıffness propertıes, unlike traditional composite plates with straight fibers. Tailoring variable stiffness laminates allows us completely to exploit directional properties of materials.

There is a clear effect of curved fibers on improving buckling load of variable stiffness composite plates, so we demonstrated two paths of curved fibers: the first path is linear variation of fiber angle $[\pm\varphi(x)]_{ns}$ where the path functions according to one variable, while the second path is nonlinear variation of fiber angle $[\pm\varphi(x,y)]_{ns}$(constant curvature path) where the fiber path variates spatially at each point over plate and is related to (x,y) coordinates.

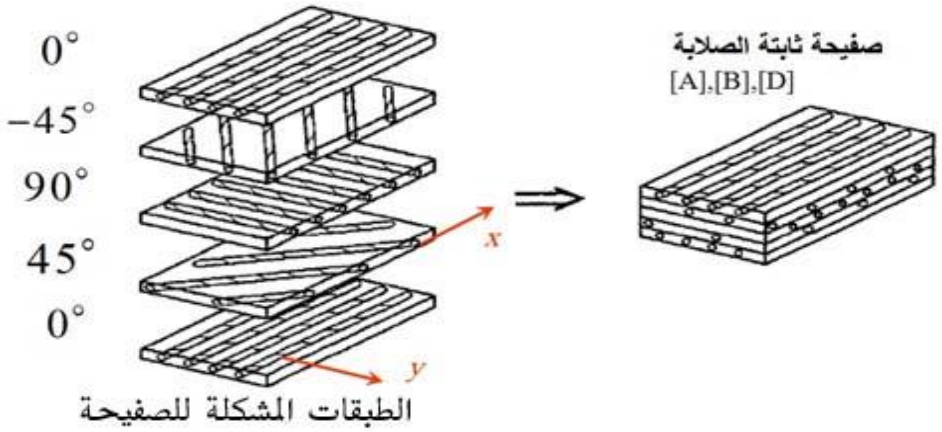
The main objective of this paper is finding fiber orientation angle equation inside a curved composite ply and its connection with curved plate coordinates as a function to local coordinates.

We found out nonlinear variation of fiber path on elliptical, cylindrical, and conical composite plates because this type of plates is very common in planes, rockets, and satellites, and gives a wide space of multiple variable coefficients. We can study optimal distribution of fibers under buckling load on curved laminates.

Key words: Variable stiffness, nonlinear variation of fiber, laminates tailoring, steered fibers, hybrid laminates.

أولاً–مقدمة

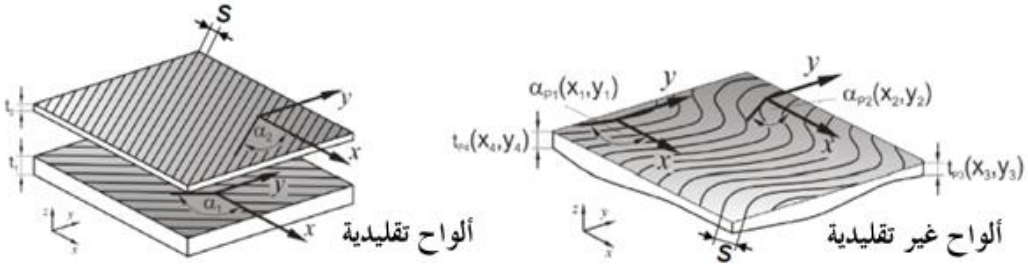
يؤدي اتجاه الليف ضمن طبقات صفائح المواد المركبة دوراً مهمة في متانة وصلابة هذه الصفائح سواء أكانت ألياف مستقيمة أم ألياف منحنية موجهة ضمن الطبقة لذلك فإن دراسة تغير مسار الليف وتحديده يلعب دوراً مهماً في التنبؤ في تغير صلابة الصفيحة، فخلال تصميم صفائح المواد المركبة التقليدية، كان الغرض هو معرفة ترتيب المواد المكونة التي تلبي المتطلبات الرئيسية بشكل أفضل، مثل المتانة والصلابة والتكلفة. عادة في توجيه الألياف يتم اختيار الزوايا من المجموعة$\{0^o, +45^o, -45^o, 90^o\}$ وتبقى هذه الزوايا ثابتة داخل كامل الطبقة، كما هو مبين في الشكل(1)



الشكل(1) التسلسل الطبقي للصفائح التقليدية

في هذا الترتيب للألياف لم يتم الاستفادة بشكل كامل من خواص المواد المركبة لأنه يمكن الاستفادة فقط من عدد محدد من مجموعات توجيه الألياف والتسلسل الطبقي. إن التطورات الأخيرة في مفهوم صفائح المواد المركبة غير التقليدية **(Non Classical Laminates)** أدت إلى تحسين في الخواص الميكانيكية و في وزن الهيكل والتي يمكن تحقيقها عن طريق تعديل التسلسل الطبقي ضمن حدود قواعد التصميم المتبعة في الصفائح التقليدية وهذا ما يسمى حياكة المواد المركبة.

هناك العديد من الطرق التي يمكن من خلالها تحقيق حياكة المواد المركبة. وأحد هذه الطرق هي إما إضافة الطبقات إلى الصفائح أو باستخدام ألياف منحنية الخطوط، كما هو موضح بالشكل**(2)**.



الشكل(2) توضع الألياف متغيرة التوجيه ومتغيرة السماكة ضمن الطبقات

حيث أظهرت الدراسات الأولية تأثير التغير الخطي للألياف على المواد المركبة المتغيرة الصلابة **[1]** وإلى وجود تحسينات في حمل التحنيب والصلابة المحورية للصفيحة المعرضة لانزياح منتظم ناتج عن الضغط في نهاية الصفيحة.

وقد شغل موضوع تحسين حمل التحنيب للإنشاء باستخدام مفهوم الصلابة المتغيرة اهتمام العديد من الباحثين. حيث قام الباحث GÜRDAL وفريقه **[2]** بدراسة تغيّر زاوية الليف وأثره على الصلابة الداخلية لصفيحة المواد المركبة وأداء التحنيب الخاص بها. كما تم مناقشة الصفائح متغيرة الصلابة ذات الخصائص السطحية نفسها مع المواد الشبه متماثلة الخواص من قبل GÜRDAL وفريقه **[3]**، حيث أثبت أن الصفائح المتغيرة الصلابة قادرة على تحمل ضعفي حمل الانضغاط قبل حصول التحنيب مقارنة بالصفائح المركبة الشبه متماثلة الخواص. وقد أتاح البحث فهم أفضل لآلية إعادة توزيع الأحمال المسؤولة عن الزيادة في حمل التحنيب.

وفي بحث سابق **[4]** نتج زيادة في حمل التحنيب للصفائح المتغيرة الصلابة بنسبة **33.9٪** مقارنة مع صفائح المواد المركبة ثابتة الصلابة بوجود تداخل للألياف المنحنية خلال عملية السحب.

تم إجراء دراسة ومقارنة بين الصفائح متغيرة الصلابة مربعة الشكل موثوقة مع صفائح مماثلة ذات استناد بسيط حيث كان التحسن في حمل التحنيب بنسبة **66%**. كما تم دراسة **[5]** تأثير توجيه الألياف على تغير الصلابة في الصفائح باستخدام برامترات التصميم، عند تغير زاوية توجيه الألياف في كل طبقة من هذه الصفائح خطيًا بالنسبة للإحداثيات الأفقية. يشير الباحثون إلى أن الألياف المنحنية خطياً تقود إلى تغيير في الإجهادات، مثل تغيير موضع الإجهاد الأعظمي على الصفيحة وهذه التغييرات في قيم الإجهادات الأعظمية والمواقع يمكن استغلالها لتحسين مقاومة الانهيار في تطبيقات معينة، ولأن الصفائح الأسطوانية لها أهمية في الدراسة كونها تشكل جزءاً من الإنشاءات المستخدمة في التطبيقات الفضائية فقد تم أيضاً دراسة زاوية الليف محيطياً ومحورياً واستنتاجها.

ثانياً- أهمية البحث وأهدافه

تكمن أهمية البحث في الحصول على معادلة تغير غير خطية لزاوية الليف بالنسبة للإحداثيات المكانية على الصفيحة حيث إن الزاوية θ تعد تابعاً للإحداثيات **(x,y)**، وبالتالي تعد مصفوفة الصلابة $[A][B][D]$ تابعة بشكل مباشر للزاوية θ [2]:

$$\bar{Q}_{11}(x,y) = U_1 + U_2 \cos 2\theta(x,y) + U_3 \cos 4\theta(x,y)$$

علماً أن:

θ: هي زاوية توجيه الليف.

$\bar{Q}_{11}$- تمثل حدود الصلابة للمصفوفة التحويلية وفقاً لزاوية التوجيه.

U_1, U_2, U_3 - هي ثوابت تعطى قيمها بدلالة حدود الصلابة للمواد متعامدة الخواص بالعلاقات التالية :

$$U_1 = \frac{1}{8}(3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66})$$

$$U_2 = \frac{1}{2}(Q_{11} - Q_{22})$$

$$U_3 = \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66})$$

لذلك يهدف البحث إلى:

1- استنتاج العلاقة التي تعطي التغير غير الخطي لزاوية توجيه مسار الليف ضمن صفائح المواد المركبة المنحنية واختيار الانحناء الأمثل لتوجيه الليف والذي يؤثر بشكل مباشر على مفهوم الصلابة والتي ستتغير بتغير موقع الليف أي يعتمد على تغيير زوايا توجيه الألياف.

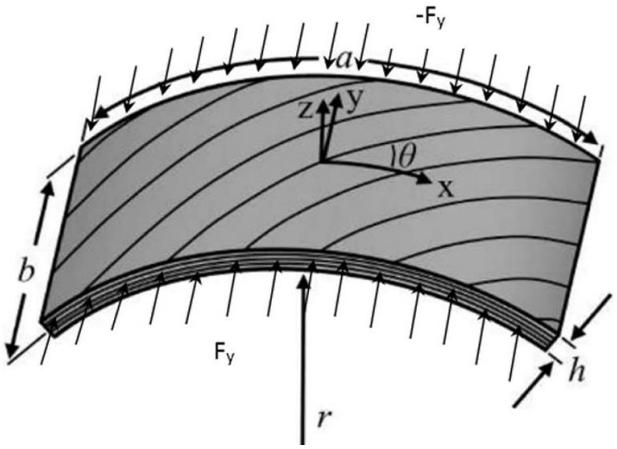
2- الحصول على علاقة التغير غير الخطي لزاوية الليف على الصفيحة الأسطوانية والمخروطية محيطياً ومحورياً.

3- استخدام العلاقات المستنتجة في نمذجة الصفائح المنحنية (الأسطوانية والمخروطية) في إجراء عملية نمذجة للحصول على المسار الأمثل لليف والمحكوم بزوايا التوجيه المثالية ضمن الطبقة القشرية وبالتالي ضمن الصفيحة الأسطوانية أو المخروطية.

ثالثاً- الدراسة التحليلية

1- استنتاج معادلة تغير زاوية الليف على الصفيحة القشرية المنحنية:

سنقوم بافتراض أن العينة المدروسة عبارة عن صفيحة منحنية ومتوازنة ذات صلابة متغيرة واتجاه الألياف من الشكل $[\pm\theta(x,y)]_{ns}$ تتعرض لحمل انضغاطي منتظم على الصفيحة الأسطوانية والذي سيتحول بدوره إلى حملين كنتيجة لذلك، حمل شد $\boldsymbol{F_y}$ وحمل معاكس له $-\boldsymbol{F_y}$ حيث يؤدي تطبيق الحمل إلى تحنيب على الصفيحة، الشكل**(3)**



الشكل(3) الصفيحة القشرية المنحنية

إذ إن: ***a*** و **b** - هي طول وعرض الصفيحة على التوالي، و**r** – هو نصف قطر الإنشاء المدروس، والشروط الحدية المطبقة هي أن الصفيحة مقيدة عند **x=0** و **x=a** بحيث يتم محاكاة الوضع الهندسي للصفيحة المدروسة في موقعها الفعلي، وتكون **y=0** و **y=b** لتحاكي موقعها عند أطراف المثبتات، الشكل**(3)**.

قبل الدخول في إيجاد معادلة المسار لليف فإن طول القوس الدائري الذي يمثل الطول الفعلي المنحني للصفيحة القشرية يعطى بالعلاقة التالية:

$$A = \phi . r \qquad (1)$$

حيث أن **A** هو طول القوس الدائري

$\boldsymbol{\phi}$ الزاوية بين طرفي القوس

r نصف قطر الانحناء

لقد تم اعتماد توابع متعددة البارامترات مع تغير غير خطي لتوجيه الليف وفق ما قام مجموعة من الباحثين **[6]**، لذلك سوف نستعرض التغير الخطيّ وغير الخطي لتوجيه الليف **[1]**

2- التغير الخطي لزوايا توجيه الليف:

إن الشكل المبسَّط للتغير الخطي لزوايا توجيه الليف بالنسبة لصفيحة قشرية مستطيلة منحنية يعطى بالعلاقة التالية:

$$\theta(\tilde{x}) = \frac{2(T_1 - T_0)}{a}|\tilde{x}| + T_0 \qquad (2)$$

إذ إنَّ $\boldsymbol{T_0}$: هي زاوية توجيه الليف عند $(\tilde{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0})$.

$\boldsymbol{T_1}$ هي زاوية توجيه الليف عند نهاية الصفيحة أي $\left(\tilde{x} = \pm\frac{a}{2}\right)$، راجع الشكل **(3)**.

ولكي نستفيد من المعادلة **(2)** نأخذ بعين الاعتبار نظام الإحداثيات في الشكل **(3)** ونكتب المعادلة **(2)** بالشكل التالي:

$$\theta(\tilde{x}) = \begin{cases} \dfrac{2(T_0 - T_1)}{a} + T_1 & for\ 0 \le x \le \dfrac{a}{2} \\ \dfrac{2(T_1 - T_0)}{a} + T_1 - 2(T_1 - T_0) & for\ \dfrac{a}{2} \le x \le a \end{cases} \qquad (3)$$

أي أن الزاوية تتغير بتغير الإحداثي **x**، وتؤخذ بواحدة $\frac{deg}{mm}$.

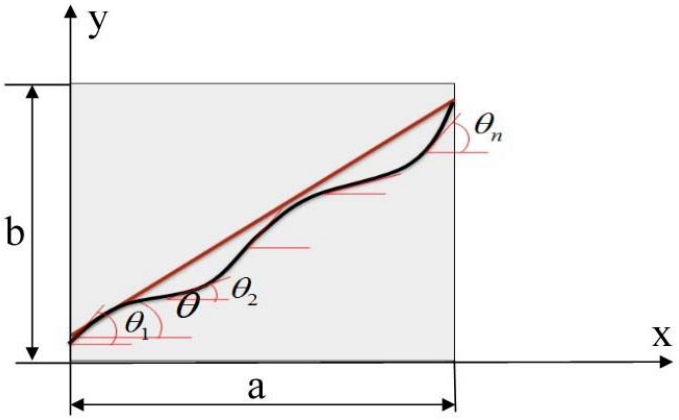
يتميز التغير الخطي لمسار الليف بقلة تعقيده وسهولة النمذجة باستخدام صيغته، ولكنه يمتلك محدودية في عملية النمذجة بسبب محدودية المتغيرات التصميمية وهذا ما دفعنا لفكرة التغير غير الخطي لمسار الليف

3- التغير غير الخطي لزوايا توجيه الليف:

قدمت الدراسة **[6]** طرح تعريف للمسار غير الخطيّ لتوجيه الليف حيث يتبع تغير المسار لإحداثيين على سطح التشكيل.

تمت إعادة صياغة كثيرات حدود لوبوتو ليجيندر بحيث يمكن تعميم التغير وحيد الاتجاه ليتم تطبيقه على زوايا توجيه الليف المتغيرة على السطح.

نفترض مجال الدراسة مستطيلاً منحنياً كما في الشكل **(4)**.



الشكل(4) تعريف المسار الغير خطي

نقوم بتحديد الإحداثيات النسبية ξ و η بالعلاقات التالية:

$$t = \frac{2x - a}{a} \qquad \eta = \frac{2y - b}{b} \qquad (4)$$

إذ إنَّ هذه القيم تقع ضمن المجال $\mathbf{-1 \le t \le 1}$ ، $\mathbf{-1 \le \eta \le 1}$ وبالتالي يمكن تعريف زاوية توجيه الليف في المستوي $\mathbf{t - \eta}$ بالعلاقة التالية:

$$\theta(t,\eta) = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} T_{ij} L_i(t) L_j(\eta) \qquad (5)$$

إذ تمثل **m** و **n** عدد التوابع الأساسية المستخدمة في الاتجاهات $\mathbf{\eta, t}$ على التوالي.

$\boldsymbol{T_{ij}}$ هي المتغيرات التصميمية.

$\boldsymbol{L_i}$ هي كثيرات حدود لوبوتو والتي تُعرف كالتالي:

$$L_i(t) = \int_{-1}^{t} P_{i-1}(\mu)\, d\mu \qquad i \ge \qquad (6)$$

أو يمكن كتابتها كحدود متعددة بالشكل التالي:

$$L_i(t) = \frac{1}{i}\left(tP_{i-1}(t) - P_{i-2}(t)\right) \qquad i \ge 2 \qquad (7)$$

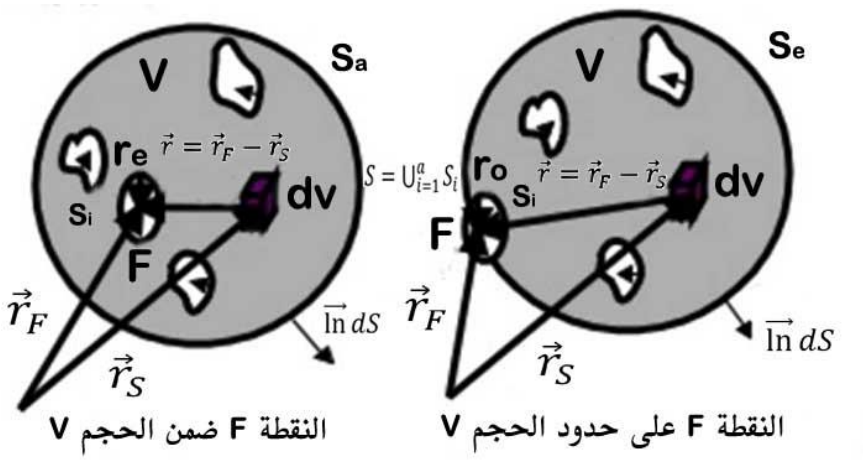
إذ إن $\boldsymbol{P_i}$ هي كثيرات حدود ليجيندر ونحصل عليها وفق ما يلي:

من معادلة لابلاس التفاضلية المتجانسة:

$$\nabla^2 \emptyset(r) = 0 \qquad (8)$$

نحسب القدرة $\emptyset$ عند نقطة $\boldsymbol{F}$ من الحقل الناتج عن المصدر **S** في الحجم **V** متضمناً القيود $S = \mathrm{U}_{i=1}^{a} S_i$

تشير الدالة $\mathrm{U}_{i=1}^{a}$ إلى عملية اتحاد قيم الحالتين مع بعضهما البعض حسب الشكل**(5)**



الشكل(5) المنبع S

وبناءً على ذلك فإن

$$\vec{r} = \vec{r}_F - \vec{r}_S \qquad (9)$$

هي الشعاع المتجه من **S** إلى **F**

وبالتالي:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x\vec{l}x + y\vec{l}y + z\vec{l}z \\ \vec{r}_S &= x_S\vec{l}x + y_S\vec{l}y + z_S\vec{l}z \\ \vec{r}_F &= x_F\vec{l}x + y_F\vec{l}y + z_F\vec{l}z \end{aligned} \qquad (10)$$

لنعرف العامل

$$\nabla_S = \frac{\partial}{\partial x_s}\vec{l}x + \frac{\partial}{\partial y_s}\vec{l}y + \frac{\partial}{\partial z_s}\vec{l}z \qquad (11)$$

والذي يمثل فقط إحداثيات المنبع. يمكن الوصول لمعادلة لابلاس التفاضلية في الاحداثيات الكروية إذا علمنا أن الإحداثيات الكروية:

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \end{aligned} \qquad (12)$$

$$z = r\cos\theta$$
$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

وبالتالي يكون الحل في الإحداثيات الكروية: $\emptyset(\boldsymbol{r}) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r}}$; $\boldsymbol{r} \neq \mathbf{0}$

$$\nabla.r = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{l}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{l}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{l}_z\right)\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{x}{r}\vec{l}_x + \frac{y}{r}\vec{l}_y + \frac{z}{r}\vec{l}_z$$
$$= \frac{\vec{r}}{r} \qquad (13)$$

أو وفقاً للعلاقة **(11)** والسطر الأول من العلاقة **(10)**:

$$\nabla.r = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{l}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{l}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{l}_z\right)\left(x\vec{l}_x + y\vec{l}_y + z\vec{l}_z\right) \qquad (14)$$

$$\nabla\emptyset(r) = \nabla\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\nabla r = -\frac{1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \quad r \neq 0 \qquad (15)$$

$$\nabla^2\emptyset(r) = \nabla.\left(\nabla\emptyset(r)\right) = -\nabla.\left(\frac{1}{r^3}\right).\vec{r} - \frac{1}{r^3}\nabla.\vec{r} = \frac{3}{r^5}\vec{r}.\vec{r} - \frac{3}{r^3} = 0 \ ; \ r \neq 0 \qquad (16)$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \cos\theta$$

$$\frac{\partial\emptyset}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{-\cos\theta}{r^2} \ ; \ r \neq 0 \qquad (17)$$

$$\frac{\partial^2\emptyset}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{z}{r^3}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3z}{r^4}\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{3z^2 - r^2}{r^5} = \frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3} \ ; \ r \neq 0$$

$$\frac{\partial^3\emptyset}{\partial z^3} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{3z^2 - r^2}{r^5}\right) = \frac{6z - 2r\frac{\partial r}{\partial z}}{r^5} - 5\frac{3z^2 - r^2}{r^6}\frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{15z^3 - 9zr^2}{r^3}$$
$$= \frac{15\cos^3\theta - 9\cos\theta\ r^2}{r^4} \qquad (18)$$

نلاحظ حسب المعادلة **(18)** بأن $\frac{\boldsymbol{\partial^n\emptyset}}{\boldsymbol{\partial z^n}}$ هو كثير حدود من الدرجة **n** بالنسبة لـ $\boldsymbol{\cos\theta}$ مقسوماً على $\boldsymbol{r^{n+1}}$، باستخدام منشور تايلور نجد أن:

$$\emptyset\,(x,y,z-h) = \emptyset(x,y,z) - h\frac{\partial\emptyset}{\partial z}(x,y,z) + h^2\frac{1}{2!}\frac{\partial^2\emptyset}{\partial z^2}(x,y,z) + \cdots$$
$$+ h^n\frac{(-1)^n}{n!}\frac{\partial^n\emptyset}{\partial z^n}(x,y,z) \qquad (19)$$

$$\emptyset(x,y,z-h)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}}$$
$$=\frac{1}{r}-h\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)+h^2\frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{z^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\cdots+h^n\frac{(-1)^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial z^n} \quad (20)$$

والتي يمكن صياغتها بالشكل التالي بعد الأخذ بعين الاعتبار الإحداثيات الكروية:

$$\emptyset(x,y,z-h)=\frac{1}{\sqrt{r^2-2rh\cos\theta+h^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}h^n\frac{(-1)^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\frac{1}{r}\right) \quad (21)$$

الآن لو عرفنا التابع:

$$p_n(\cos\theta)=r^{n+1}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\frac{1}{r}\right) \quad \Rightarrow$$
$$h^n\frac{(-1)^n}{n!}\frac{\partial n}{\partial z^n}\frac{1}{r}=\frac{1}{r}\left(\frac{h}{r}\right)^n p_n\cos\theta \quad (22)$$

وبالتالي:

$$\frac{1}{\sqrt{r^2-2rh\cos\theta+h^2}}=\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{h}{r}\right)^n p_n(\cos\theta) \quad h\le r \quad (23)$$

نفرض أن $w=p_n(\cos\theta)$ ونستبدل $\boldsymbol{w}/\boldsymbol{r^{n+1}}$ في معادلة لابلاس بالإحداثيات الكروية بدلا من $\emptyset$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{w}{r^{n+1}}\right)\right]+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{w}{r^{n+1}}\right)\right]$$
$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\underbrace{\frac{\partial^2}{\partial^2\emptyset}\left(\frac{w}{r^{n+1}}\right)}_{0}=0$$

باختزال المقدار $\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r^2}}$ من المعادلة السابقة وبذلك يصبح المشتق الجزئي مشتقاً كلياً:

$$n(n+1)w+\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{dw}{d\theta}\right] \quad (24)$$

نفرض أن $t=\cos\theta$ فيكون $dt=-\sin\theta\,d\theta$ فيكون:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{dw}{d\theta}\right]=\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\ \underbrace{\frac{dt}{d\theta}}_{-sin\theta}\frac{dw}{dt}\right]$$

$$=\frac{1}{\underbrace{\sin\theta}_{-1}\frac{dt}{d\theta}}\frac{d}{dt}\left[-\underbrace{(1-r^2)}_{sin^2\theta}\frac{dw}{dt}\right]=\frac{d}{dt}\left[(1-t^2)\frac{dw}{dt}\right]\qquad(25)$$

بالتعويض في(**24**) نجد أن:

$$\frac{d}{dt}\left[(1-t^2)\frac{dw}{dt}\right]+n(n+1)w=0\qquad|t|\le 1$$

وبما أن $w=p_n(\cos\theta)$ و $\cos\theta=t$ فإن المعادلة تأخذ الشكل التالي:

$$\frac{d}{dt}\left[(1-t^2)\frac{d}{dt}P_n(t)\right]+n(n+1)P_n(t)=0\qquad|t|\le 1\qquad(26)$$

والتي تسمى معادلة ليجيندر التفاضلية، و $P_n(t)$ كثيرات حدود ليجيندر وهي واحدة من الحالتين الآتيتين:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\frac{h}{r}\cos\theta+\left(\frac{h}{r}\right)^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{h}{r}\right)^n p_n(\cos\theta)\qquad(27)$$

ومن أجل $\boldsymbol{u=h/r}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2u\cos\theta+u^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}u^n p_n(\cos\theta)\quad|u|\le r\qquad(28)$$

يشكل الطرف الأيسر من المعادلة(**28**)، التابع المولد لكثيرات حدود ليجيندر. باستبدال $cos\theta=t$ وبمفاضلة طرفي المعادلة جزئياً بالنسبة لـ **u** وإعادة ترتيبها:

$$\frac{\partial g}{\partial u}=\frac{t-u}{\sqrt{1-2ut+u^2}}=(1-2ut+u^2)\sum_{n=1}^{\infty}nu^{n-1}P_n(t)\ \Rightarrow$$

$$\begin{cases} n=0 & tP_0(t)=P_1(t)\\ n=1 & tuP_1(t)-uP_0(t)=2uP_2(t)-2utP_1(t)\\ n\ge 2 & (2n+1)tu^nP_n(t)-nu^nP_{n-1}(t)=(n+1)u^nP_{n+1}(t)\end{cases}\qquad(29)$$

إن العلاقة الأخيرة من الدرجة **n** تتوافق مع العلاقتين السابقتين من الدرجة **n=0** و**n=1** ويمكن كتابتها بالشكل الآتي:

$$P_{n+1}(t) = \frac{(2n+1)}{n+1} tP_n(t) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(t) \quad n \geq 1$$

وهي العلاقة التكرارية لكثير حدود ليجيندر وهي تسمى بعلاقة بونر التكرارية

بافتراض أن $i = n + 1$ تصبح المعادلة بشكلها النهائي

$$P_i(t) = \frac{\left[(2i-1)tP_{(i-1)}(t) - (i-1)P_{(i-2)}(t)\right]}{i} \qquad (30)$$

$$P_0(t) = 1$$

$$P_1(t) = t$$

وهكذا فإنه من أجل عدة قيم للمتغير $\boldsymbol{i}$ نحصل على حدود أكبر حسب المتطلبات من مسار الليف، و لو عدنا لكثير حدود لوبوتو:

$$L_i(t) = \int_{-1}^{t} P_{i-1}(\mu) d\mu \qquad i \geq 2$$

ويمكن كتابتها بالصيغة التكرارية:

$$L_i(t) = \frac{1}{i}\left(t\frac{\left[(2i-3)tP_{(i-2)}(t) - (i-2)P_{(i-3)}(t)\right]}{i-1} - \frac{\left[(2i-5)tP_{(i-3)}(t) - (i-3)P_{(i-4)}(t)\right]}{i-2}\right) \quad i \geq 2 \quad (31)$$

ومن أجل لـ .... $\boldsymbol{i = 2, 3, 4, 5}$ نحصل على عدة حدود لتابع لوبوتو، وبالتالي تكون معادلة الليف تابعة للإحداثيات المكانية بدلالة كثيري حدود لوباتو وليجيندر

$$\theta(t,\eta) = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} T_{ij}\frac{1}{i}\left(t\frac{\left[(2i-3)tP_{(i-2)}(t) - (i-2)P_{(i-3)}(t)\right]}{i-1} - \frac{\left[(2i-5)tP_{(i-3)}(t) - (i-3)P_{(i-4)}(t)\right]}{i-2}\right).\frac{1}{j}\left(\eta\frac{\left[(2j-3)\eta P_{(j-2)}(\eta) - (j-2)P_{(j-3)}(\eta)\right]}{j-1} - \frac{\left[(2j-5)\eta P_{(j-3)}(\eta) - (j-3)P_{(j-4)}(\eta)\right]}{j-2}\right) \qquad (32)$$

$$\theta(t,\eta) = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} T_{ij} L_i(t) L_j(\eta)$$

حيث أن **m, n** هي عدد التوابع الأساسية في الاتجاهات $\boldsymbol{\eta, t}$ المعادلات (4). فبزيادة عدد المتغيرات التصميمية $\boldsymbol{T_{ij}}$ في المعادلة **(32)** التي تعبر عن التغير غير الخطي لمسار الليف يمكن الحصول على حرية في تمثيل التغيرات الزاوية. وكنتيجة لذلك سيكون هناك فرصة أفضل للحصول على توزع مثالي لزاوية الليف. بناءً على ذلك فإن متغيرات التصميم هي المعاملات المجهولة $\boldsymbol{T_{ij}}$.

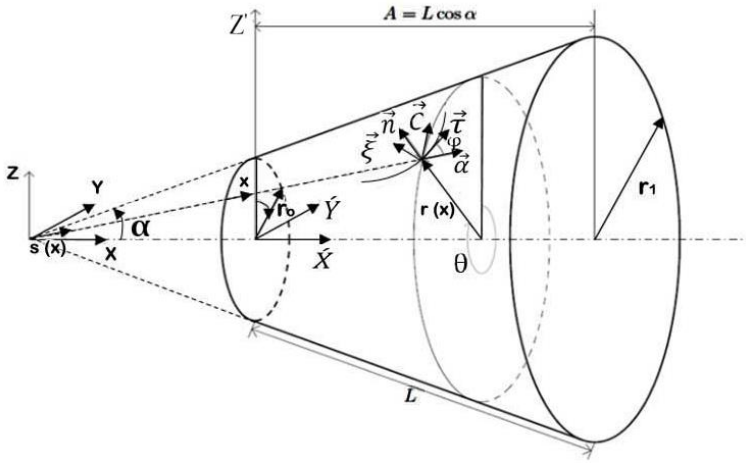
4- استنتاج معادلة تغير زاوية الليف على الصفيحة القشرية المخروطية:

سنقوم باستعراض عام ووصف للصفائح المخروطية من أجل تعريف مسار الليف، والذي سيتم استخدامه في مجال واسع من التطبيقات.

بعد ذلك سنقوم باشتقاق المعادلات الخاصة التي سوف تعرّف الانحناء المستوي للمسار العشوائي لليف على السطح العام للمخروط. ثم بعد ذلك سوف يتم تبسيط المعادلات ليتم تعميمها على الصفائح الأسطوانية.

4-1- هندسة القشريات المخروطية:

يمثل الشكل **(6)** مجسماً فراغياً للقشريات المخروطية، تكون فيه جملة الإحداثيات العامة للقشريات المخروطية الرقيقة هي المسافة الطولية x التي تخترق سطح قاعدة جذع المخروط من نصف القطر الصغير، والزاوية المحيطية **θ** والتي تقاس في الاتجاه المشار إليه حيث **θ=0** درجة والاتجاه الموجب يوافق اتجاه المحور **Z'-axis**. أما البرامترات الرئيسية المستخدمة في تعريف المخروط القشري هي زاوية المخروط **α** ونصف القطر الصغير $\boldsymbol{r_0}$ (القاعدة الصغرى لجذع المخروط) ونصف القطر الكبير $\mathbf{r_1}$ (القاعدة الكبرى لجذع المخروط).



الشكل(6) مجسم فراغي للقشرية المخروطية

يمكن تحديد الطول المحوري **A** أو الطول عبر السطح **L** بالاعتماد على $\boldsymbol{r_0}$ و $\boldsymbol{r_1}$. تُعطى قيمة الزاوية **α** بالاعتماد على القيم السابقة وفق العلاقات التالية:

$$tan\,\alpha = \frac{r_1 - r_0}{A} \quad or \quad sin\,\alpha = \frac{r_1 - r_0}{L} \qquad (33)$$

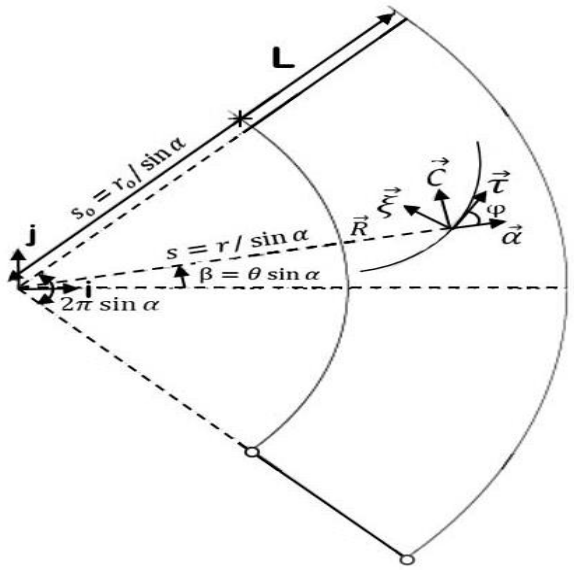
إن نصف القطر $r(x)$ يشكل المسافة العمودية من محور الدوران لنقطة متغيرة خطياً بالنسبة للقشرية المخروطية:

$$r(x) = r_0 + x\,sin\,\alpha \qquad (34)$$

كما يتم تعريف إحداثي السطح الطولي المخروطي **s(x)** بقياس المسافة من رأس المخروط إلى نقطة على السطح وفق العلاقة التالية:

$$s(x) = \frac{r(x)}{sin\,\alpha} = x + \frac{r_0}{sin\,\alpha} \qquad (35)$$

سنقوم باستخدام الأشعة الواحدية، $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ بالاتجاه الطولي، $\vec{\boldsymbol{c}}$ بالاتجاه المحيطي، $\vec{\boldsymbol{n}}$ باتجاه الناظم على السطح المخروطي، في تعريف مسار الليف إضافة لنظام الإحداثيات العمودي **x,y,z** الموضح في الشكل **(7)**.



الشكل (7) الشكل المُنبَسِط للمخروط

يتم استخدام المسقط الثنائي والتعريف المخروطي لأغراض التمثيل الهندسي والاشتقاق. إذ إنه تم الحصول على التمثيل ثنائي البعد وثلاثي البعد للمخروط من خلال إجراء مقطع تخيلي عبر الخط الطولي عند الزاوية **180** ومن ثم إجراء عملية فرد للسطح ليبدو كما في الشكل **7** . كما أن إحداثيات السطح الموافقة للشكل الهندسي **(7)**، هي المسافة نصف القطرية **s** والمشابهة لإحداثيات السطح الطولية **s** في التمثيل ثلاثي الأبعاد، والإحداثي المحيطي $\beta = \theta \sin\alpha$.

ملاحظة: الأطوال تبقى نفسها لكلا التمثيلين الهندسيين بسبب منحني غاوص الصفري للسطح المخروطي. يمكن رؤية ذلك من خلال علاقات الأطوال التفاضلية للشكل غير الملفوف.

$$dx = ds \qquad r(x)d\theta = sd\beta \tag{36}$$

4-2- تعريف المسارات على السطح القشري للمخروط والأسطوانة:

سنقوم باستنتاج العلاقات العامة المطلوبة لانحناء مسار الليف على سطح الشكل المخروطي، حيث سنقوم ببناء طبقة قشرية من خلال عدد من مسارات الألياف المتشابهة.

استخدمنا الإحداثيات $\{x, \theta\}$ من خلال مشتقات رياضية باستخدام الرموز التالية: φ تعرف على أنها الزاوية بين ناظم السطح الطولي $\vec{a}$ والمماس على المسار $\vec{\tau}$، أي يمكن أن تكون زاوية الليف تابعة إما للإحداثي الطولي **x** أو الإحداثي المحيطي θ ، وبالتالي تحدد زاوية توجيه الليف كالتالي:

$$tan\,\varphi = r(x)\frac{d\theta}{dx} \qquad (37)$$

أيضا يمكن التعبير عن المتجه المماسي للمسار بدلالة متجه السطح وفقاً للعلاقة التالية:

$$\vec{\tau} \;= cos\,\varphi\,\vec{a} \;+ sin\,\varphi\,\vec{c} \qquad (38)$$

وبالتالي فإن انحناء مسار الليف يمكن تعريفه في حال معرفة المتجه المماسي $\hat{\tau}$ كالتالي:

$$\vec{k} \;= \frac{d\vec{\tau}}{dl} = \frac{d\vec{\tau}}{dx}\frac{dx}{dl} \qquad (39)$$

حيث أن **dl** يمثل طول القوس متناهي الصغر عبر مسار الليف.

$$\frac{d\vec{\tau}}{dx} = -\,sin\,\varphi\frac{d\varphi}{dx}\vec{a} + cos\,\varphi\frac{d\vec{a}}{dx} + cos\,\varphi\frac{d\varphi}{dx}\vec{c} + sin\,\varphi\frac{d\vec{c}}{dx} \qquad (40)$$

يمكن إيجاد المشتقات $\vec{a}$ و $\vec{c}$ بالنسبة لـ **x** باستخدام التحويلات التالية على اعتبار $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, and\ \vec{k}$ هي الأشعة الواحدية للإحداثيات **X,Y,Z** على التوالي:

$$\begin{Bmatrix}\vec{a}\\ \vec{c}\\ \vec{n}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\,\alpha & sin\,\alpha\,sin\,\theta & sin\,\alpha\,cos\,\theta \\ 0 & cos\,\theta & -\,sin\,\theta \\ -\,sin\,\alpha & cos\,\alpha\,sin\,\theta & cos\,\alpha\,cos\,\theta \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\vec{\imath}\\ \vec{\jmath}\\ \vec{k}\end{Bmatrix} = [T]\begin{Bmatrix}\vec{\imath}\\ \vec{\jmath}\\ \vec{k}\end{Bmatrix} \qquad (41)$$

وبالتالي بالتعويض تصبح العلاقة:

$$\frac{d}{dx}\begin{Bmatrix}\vec{a}\\ \vec{c}\\ \vec{n}\end{Bmatrix} = \frac{d}{dx}[T]\begin{Bmatrix}\vec{i}\\ \vec{j}\\ \vec{k}\end{Bmatrix} = \frac{d}{dx}[T][T]^{-1}\begin{Bmatrix}\vec{a}\\ \vec{c}\\ \vec{n}\end{Bmatrix} \qquad (42)$$

نعلم أن $\frac{d\vec{c}}{dx} = -\sin\alpha\frac{d\theta}{dx}\vec{a} - \cos\alpha\frac{d\theta}{dx}\vec{n}$ و $\frac{d\vec{a}}{dx} = \sin\alpha\frac{d\theta}{dx}\vec{c}$

نقوم باستبدال هاتين العلاقتين في المعادلة (**40**) لنحصل على العلاقة التالية:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dx} = -\left(\frac{d\varphi}{dx} + \sin\alpha\frac{d\theta}{dx}\right)\sin\varphi\,\vec{a} + \left(\frac{d\varphi}{dx} + \sin\alpha\frac{d\theta}{dx}\right)\cos\varphi\,\vec{c} - \cos\alpha\sin\varphi\frac{d\theta}{dx}\vec{n} \qquad (43)$$

مع مراعاة أن $\frac{dx}{dl} = \cos\varphi$ والتعويض بالعلاقة **(39)** نجد:

$$\vec{k} = -\left(\frac{d\varphi}{dx} + \sin\alpha\frac{d\theta}{dx}\right)\sin\varphi\,.\cos\varphi\,\vec{a} + \left(\frac{d\varphi}{dx} + \sin\alpha\frac{d\theta}{dx}\right)\cos^2\varphi\,\vec{c} - \cos\alpha\sin\varphi\cos\varphi\frac{d\theta}{dx}\vec{n} \qquad (44)$$

يمكن تبسيط المعادلة المشتقة وذلك بالتعبير عنها بدلالة الإحداثيات السطحية $\vec{\boldsymbol{n}}, \vec{\boldsymbol{\tau}}, \vec{\boldsymbol{\xi}}$ والتي تمثل شعاع الناظم للمسار السطحي، والشعاع المماسي والشعاع العمودي على السطح على التوالي، وباستخدام مصفوفة تحويل الاحداثيات تصبح العلاقة **(44)**:

$$\underset{k}{\rightarrow} = \left[\frac{d\varphi}{dx}\ \cos\ \varphi + \frac{(\sin\ \alpha\ \sin\ \varphi)}{r(x)}\right]\vec{\xi} + \left[\frac{-\cos\ \alpha\ sin^2\ \varphi}{r(x)}\right]\vec{n} \qquad (45)$$

حيث إن $\vec{\boldsymbol{\xi}}$ يمثل المتجه السطحي العمودي على مسار الليف، و $\vec{\boldsymbol{n}}$ تمثل المتجه العمودي على سطح المخروط. وهكذا فإنه تم تحديد الليف كتابع للإحداثيات المحيطية $\boldsymbol{\theta}$ فإن المعادلة **(45)** يمكن إعادة كتابتها كتابع لـ $\boldsymbol{\theta}$ باستخدام المعادلة **(37)**:

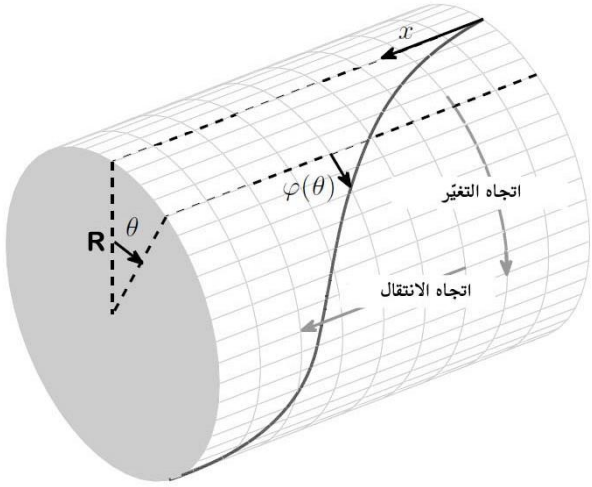
$$\frac{d\varphi}{dx}\cos\varphi = \frac{d\varphi}{d\theta}\frac{d\theta}{dx}\cos\varphi = \frac{d\varphi}{d\theta}\frac{\tan\varphi}{r(x)}\cos\varphi = \frac{d\varphi}{d\theta}\frac{\sin\varphi}{r(x)} \qquad (46)$$

وبالتالي تصبح المعادلة في حال $\boldsymbol{\varphi = \varphi(\theta)}$ و $\boldsymbol{\varphi = \varphi(x)}$ كالتالي:

$$k(x) = \frac{d\varphi}{dx}\cos\varphi(x) + \frac{\sin\alpha\sin\varphi(x)}{r(x)} \quad for\ \varphi = \varphi(x)$$

$$k(x,\theta) = \left(\frac{d\varphi}{d\theta} + \sin\alpha\right)\frac{(\sin\varphi(\theta))}{r(x)} \quad for\ \varphi = \varphi(\theta) \qquad (47)$$

يمكن تبسيط هاتين المعادلتين **(47)** عندما تكون الصفيحة القشرية على شكل أسطوانة حيث يكون القطر **R** ثابتاً وزاوية المخروط صفر



الشكل(8) الصفيحة القشرية الأسطوانية

لتصبح بالشكل التالي:

$$k(x) = \frac{d\varphi}{dx}\cos\varphi(x)$$

$$k(x,\theta) = \frac{d\varphi}{Rd\theta}\sin\varphi(\theta) \qquad (48)$$

مسار النقطة التي تشكل الليف الواحد هو مسار يتعلق بزوايا توجيه الليف وهي زوايا تتغير قيمتها من موقع لآخر وذلك حسب شروط التحميل على الأسطوانة القشرية أو المخروط القشري أي ليس للمسار شكل محدد

5- مسار الانحناء الثابت(التغير غير الخطي لزاوية الليف):

5-1- التغير المحوري للزاوية على الصفائح المخروطية

يحدد تغير الزاوية بالنسبة لمسار الانحناء الثابت مرة أخرى بدءً من الزاوية $\mathbf{T_0}$ عند نصف القطر الصغير $\mathbf{r_0}$ (أو $\mathbf{s_0}$) وانتهاءً بالزاوية $\mathbf{T_1}$ عند نصف القطر الكبير $\mathbf{r_1}$ أو ($\mathbf{s_1}$)، تعطى معادلة الانحناء بالعلاقة التالية:

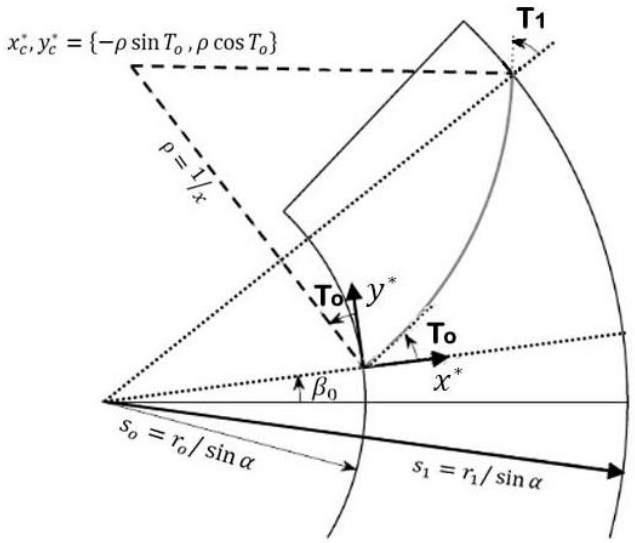
$$k(x) = \frac{d\varphi}{dx}\cos\varphi(x) + \left(\frac{\sin\alpha\cos\varphi(x)}{r(x)}\right) \qquad (49)$$

بإجراء مجموعة من الخطوات الرياضية نستطيع الوصول إلى العلاقة التالية:

$$\sin\varphi(x) = \frac{r_0\sin T_0}{r(x)} + \frac{k}{\sin\alpha}\left(\frac{r(x)^2 - r_0^2}{2r(x)}\right)$$
$$= \frac{s_0\sin T_0}{s} + k\left(\frac{s^2 - s_0^2}{2s}\right) \qquad (50)$$

ثم الوصول للمعادلة

$$\sin\varphi = k\left(\frac{s^2 - s_0^2}{2s}\right) + \frac{s_0\sin T_0}{s} \qquad (51)$$



الشكل (9) التمثيل ثنائي البعد لمسار الانحناء الثابت

تتوافق هذه المعادلة تماماً مع الاشتقاق المعتمد على التكامل العكسي من مسار نصف قطر الدوران الثابت الذي تم افتراضه على الصفيحة المخروطية المعادلة **(50)**.

أظهرت المعادلات بأن مسار الانحناء الثابت في الشكل الهندسي المسطح يتوافق بشكل دقيق مع نصف قطر الدوران الثابت على الصفيحة القشرية المخروطية.

الآن عند إيجاد العلاقات التي تحدد زاوية الليف ومسار الليف، من المهم تقييم وإيجاد قيمة الانحناء k كتابع لزوايا التوجيه عند أنصاف الأقطار الصغيرة والكبيرة للمخروط (**T_0** و **T_1** على التوالي)، بناء على ذلك فإنه إذا كانت زاوية الليف المأخوذة بعين الاعتبار عند نصف القطر الكبير تُعطى قيمة **T_1** لتصبح المعادلة**(50)**:

$$\varphi(L) = T_1 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{r_1 \sin T_1 - r_0 \sin T_0}{L\left(\frac{r_1 + r_0}{2}\right)} \qquad (52)$$

بإعادة ترتيب المعادلة من أجل زاوية التوجيه بدلالة **x** والتعبير عنها بحيث أن كل قيم زاوية المخروط تكون واضحة بشكل مباشر، نحصل على المعادلات التالية للانحناء وزاوية الليف

لمسار الانحناء الثابت على سطح الصفيحة المخروطي، فتكون كل من معادلة الانحناء وزاوية تغيّر المسار كالتالي:

$$k = \left(\frac{r_1}{\overline{r}}\sin T_1 - \frac{r_0}{\overline{r}}\sin T_0\right)\frac{1}{L} \qquad \left[\overline{r} = \frac{r_0 + r_1}{2}\right]$$

$$\sin\varphi = \frac{r_0}{r(x)}\sin T_0 + \left(\frac{r_1}{\overline{r}}\sin T_1 - \frac{r_0}{\overline{r}}\sin T_0\right)\frac{x}{L}\left[1 - \frac{x\sin\alpha}{2r(x)}\right] \qquad (53)$$

5-2 التغير المحوري للزاوية في الصفائح الأسطوانية:

يمكن تبسيط المعادلة **(50)** واستبدال قيمة الانحناء $\boldsymbol{k}$ بقيمته من العلاقة (53) واعتبار $\boldsymbol{r(x) = R}$ و هو قطر الأسطوانة و الزاوية $\boldsymbol{\alpha = 0}$ راجع الشكل**(8)** لتصبح بالشكل:

$$\sin\varphi(x) = \sin T_0 + (\sin T_1 - \sin T_0)\frac{x}{L} \qquad (54)$$

تُعطى كل من معادلتي الانحناء و المسار:

$$k = \frac{\sin T_1 - \sin T_0}{L} \qquad (55)$$

$$\theta = -\frac{\cos\varphi - \cos T_0}{kR} \qquad (56)$$

5-3 التغير المحيطي للزاوية في الصفائح الأسطوانية:

يمكن اشتقاق التغير المحيطي للزاوية بشكل مشابه لاشتقاقات التغير المحوري للزاوية في الصفائح الأسطوانية.

$$\cos\varphi(\theta) = \cos T_0 + (\cos T_1 - \cos T_0)\frac{\theta - \theta_0}{\theta_1 - \theta_0} \qquad (57)$$

ونكتب علاقة الانحناء والمسار بالشكل الآتي:

$$k = \frac{\cos T_0 - \cos T_1}{R(\theta_1 - \theta_0)} \qquad (58)$$

$$x = \frac{\sin \varphi - \sin T_0}{k} \qquad (59)$$

إذ إنّ قيمة **φ** معطاة بالمعادلة **(54)**. وبالتالي حصلنا على العلاقات الرياضية التي سنقوم من خلالها بدراسة ونمذجة الصفائح المنحنية المخروطية والأسطوانية.

رابعاً النتائج:

1- تصميم الصفيحة القشرية:

تتألف الصفيحة المدروسة من **24** طبقة وهي صفيحة متناظرة ومتوازنة كما أن أطراف الأسطوانية موثوقة لنهاية صلبة، بينما يمكن للصفيحة الأسطوانية أن تتحرك. تم تطبيق قيمة لعزوم الانحناء بقيم متساوية باتجاهين متعاكسين في مركز الصفائح. تم تطبيق التحليل على الصفيحة عن طريق برنامج Abaqus لحساب عزم التحنيب. يتألف النموذج المدروس من **71** عنصراً في الاتجاه المحوري و**170** عنصراً في الاتجاه المحيطي وهي قيم كافية لالتقاط التغير و رصده في الصلابة وصيغ التحنيب. إن المادة المستخدمة في تركيب الصفيحة الأسطوانية هي مادة غرافيت/إيبوكسي المثالية **AS4/855-2** وتم اختيار الخصائص الميكانيكية وخصائص المتانة لها حسب الباحث **[9]**(Lopes et al.,2007) كما تم إجراء اختبار النمذجة على عينة غرافيت/إيبوكسي أخرى **BMS8-276** من أجل تحديد التوضع الطبقي المناسب أثناء التصنيع، وذلك لأن المادة **BMS8-276** هي نفسها التي تم استخدامها لتصنيع الأسطوانة المتغيرة الصلابة. تمت نمذجة الصفيحة التقليدية المستخدمة للمقارنة وفق ما يلي:

- تمت نمذجة الصفيحة المؤلفة من **24** طبقة بتوجيه للألياف بزوايا $\mathbf{0^o, 90^o, \mp 45}$ على التحنيب تحت حمل الانحناء لاستخدامها كتصميم مرجعي.

- قمنا بتعريف الطبقات بحيث تكون الطبقات الخارجية منها بزوايا توجيه $\mp\mathbf{45}$ من أجل مقاومة الصدمات و يجب أن تكون الصفيحة متناظرة ومتوازنة لتجنب أحمال الانتقال الناتج عن القص والانتقال الناتج عن الانحناء.
- يتم تحقيق التناظر والتوازن للصفيحة عن طريق ربط الصفيحة بالألياف ذات التوجيه $\mathbf{45+}$ والألياف ذات التوجيه $\mathbf{45-}$ كما تم تطبيق قاعدة $\mathbf{10\%}$. والمقصود بهذه القاعدة، هي قاعدة أساسية وقياسية في الصناعات الفضائية وتقتضي بأن تحتوي صفائح المواد المركبة على الأقل $\mathbf{10\%}$ من التوجيهات القياسية الأساسية للألياف بالزوايا $0^o, 90^o, \mp 45$ علاوة على استخدام زوايا أخرى ضمن المجال [0,90]

تتألف الصفيحة متغيرة الصلابة أيضاً من $\mathbf{24}$ طبقة قشرية بحيث تكون توجيهات الألياف للطبقات الخارجية $\mp\mathbf{45}$ والطبقات الداخلية يمكن أن تكون إما بزوايا متغيرة التوجيه $\mp\boldsymbol{\varphi(x,\theta)}$ أو زوايا توجيه مدمجة بإدخال القيم $\mathbf{0^o, 90^o}$ وهذا يؤدي لوجود صفائح هجينة تمتلك أليافاً مستقيمة ثابتة التوجيه أو أليافاً موجهةً بزوايا متغيرة مكانياً. كما تم تحقيق التوازن للصفائح موضعياً باستخدام الزوايا المتغيرة $\boldsymbol{-\varphi(x,\theta)}$، $\boldsymbol{+\varphi(x,\theta)}$. كونه تم تصميم الصفيحة لتكون متوازنة. والهدف من اختيار التسلسل الطبقي المتاح لأجل تخفيض الجهد والوقت اللازمين في عملية النمذجة. يبين الجدول **(1)** التسلسل الطبقي الذي تم اختياره للصفائح التي أجرينا عليها عملية النمذجة.

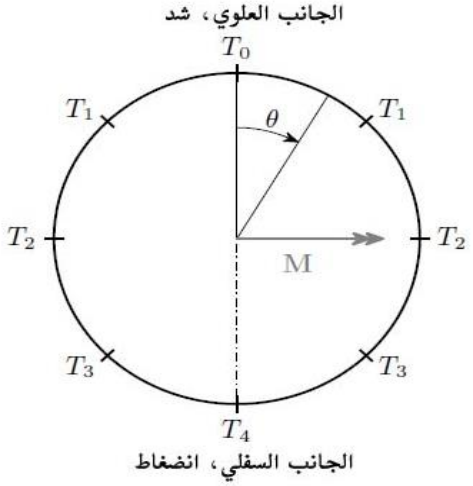
الجدول (1) تعريف الصفيحة متغيرة الصلابة

رقم الصفيحة	رقم الطبقة القشرية (نصف التنضيد المتناظر)											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
CS-1	45	−45	$+\phi_1$	$-\phi_1$	$+\phi_2$	$-\phi_2$	$+\phi_3$	$-\phi_3$	$+\phi_4$	$-\phi_4$	$+\phi_5$	$-\phi_5$
CS-2	45	−45	$+\phi_1$	$-\phi_1$	0	09	$+\phi_3$	$-\phi_3$	0	09	$+\phi_5$	$-\phi_5$
CS-3	45	−45	0	09	0	$-\phi_2$	$+\phi_2$	09	$+\phi_4$	$-\phi_4$	0	09

VS-1	45	−45	$+\varphi_1$	$-\varphi_1$	$+\varphi_{22}$	$-\varphi_2$	$+\varphi_3$	$-\varphi_3$	$+\varphi_4$	$-\varphi_4$	$+\varphi_5$	$-\varphi_5$
VS-2	45	−45	$+\varphi_1$	$-\varphi_1$	0	09	$+\varphi_3$	$-\varphi_3$	0	09	$+\varphi_5$	$-\varphi_5$
VS-3	45	−45	0	09	$+\varphi_{22}$	$-\varphi_2$	0	09	$+\varphi_4$	$-\varphi_4$	0	09
VS-4	45	−45	$+\varphi_1$	$-\varphi_1$	$+\varphi_{22}$	$-\varphi_2$	$+\varphi_1$	$-\varphi_1$	$+\varphi_2$	$-\varphi_2$	$+\varphi_1$	$-\varphi_1$
VS-5	45	−45	$+\varphi_1$	$-\varphi_1$	$+\varphi_{12}$	$-\varphi_1$	$+\varphi_1$	$-\varphi_1$	$+\varphi_1$	$-\varphi_1$	$+\varphi_1$	$-\varphi_1$

تمت نمذجة الصفائح القشرية ذات الألياف المستقيمة بزاوية توجيه ثابتة غير الزوايا الشائعة $\mathbf{0^o, 90^o, \mp 45}$. وتمت الإشارة للصفائح متغيرة الصلابة بالرمز **VS** في الجدول **(1)**. نلاحظ أن $\boldsymbol{\varphi}$ تمثل الطبقة ذات توجيهات الألياف المتغيرة ويشار للصفائح ثابتة الصلابة ذات الألياف المستقيمة بالرمز **CS** وتمثل $\boldsymbol{\phi}$ الطبقة القشرية ثابتة الزاوية بتوجيه غير تقليدي(هجين) للألياف.

- تم تقسيم الأسطوانة إلى **8** قطاعات حول المحيط من أجل تصميم الطبقة الموجهة.
- وهذا يتطلب **8** ثمانية متغيرات تصميمية في الطبقة القشرية الواحدة.
- تم افتراض التناظر للإنشاء حول المستوي العمودي الطولي.
- طالما أن شروط التحميل متناظرة أيضاً بالنسبة لهذا المستوي، يمكن تخفيض المتغيرات التصميمية الثمانية **8** إلى **5** متغيرات. ويمكن رؤية هذه المتغيرات في المقطع العرضي للأسطوانة



الشكل(10) تعريف المتغيرات التصميمية لكل طبقة

- يقع المتغيران التصميميان $\boldsymbol{T_1}$،$\boldsymbol{T_0}$ على الجانب المعرض للشد من الأسطوانة، كما $\boldsymbol{T_2}$ بجانب المحور المحايد بينما $\boldsymbol{T_3}$ و $\boldsymbol{T_4}$ تقعان على جهة الانضغاط للأسطوانة.
- إن تعريف المسار المستخدم في النمذجة هو مسار الانحناء الثابت الذي تم استعراضه في الدراسة التحليلية للمسار وذلك لأن تقييم قيود الانحناء لأجل تعريف مسار الانحناء الثابت كان أكثر شمولاً من تعريف مسار التغير الخطي للزاوية.

2- نتائج نمذجة الصفيحة القشرية ذات السماكة الثابتة

تم إجراء عملية النمذجة لصفيحة قشرية أسطوانية ثابتة السماكة احتوت على القيود الدنيا لزاوية الليف، وبالتالي تم صياغة معادلة النمذجة كالتالي:

$$Maximize \quad \lambda\left(\vec{T}_{ij}^{k}\right) \qquad k = 1,2,3,\dots,N$$

$$Subjected\ to \quad \left|k\lambda\left(\vec{T}_{ij}^{k}\right)\right| \le k_{max} \qquad x \in [0,L] \qquad (2-1)$$

إذ إن **N** هي عدد الطبقات في الصفيحة، و **x** هي إحداثيات السطح الطولية، **L** هي طول المخروط عبر السطح. إن الوصول للرقم الأعظمي للقيمة الذاتية الأساسية $\boldsymbol{\lambda}$ يتطابق مع الوصول للرقم الأعظمي للتردد **f** إذ ترتبط القيمتان بالعلاقة: $\lambda = (2\pi f)^2$. تم الحصول

على القيمة الذاتية $\boldsymbol{\lambda}$ عن طريق حل مسألة القيمة الذاتية العامة باستخدام برنامج ABAQUS الذي يعتمد على مبدأ العناصر المنتهية. وفق المعادلة: $\vec{K}\vec{\zeta} = \lambda\vec{M}\vec{\zeta}$. إن $\overrightarrow{\boldsymbol{M}}$ و $\overrightarrow{\boldsymbol{K}}$ هما على التوالي مصفوفتا الكتلة والصلابة.

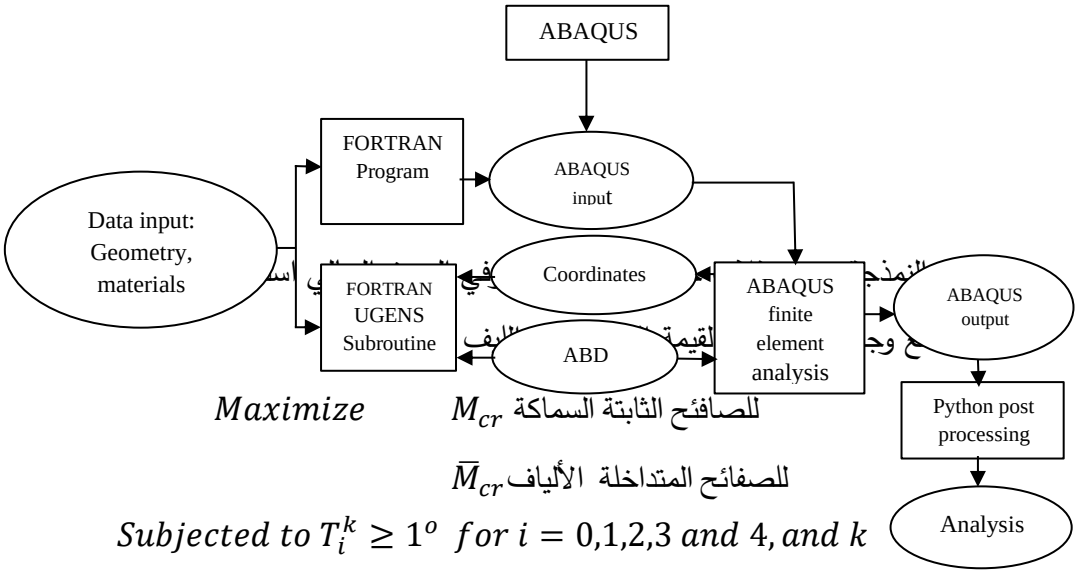
بالنسبة للمتغيرات التصميمية كما شرحنا سابقاً تمثل بالقيمة T_{ij}^{k} إذ إنّ k تمثل رقم الطبقة ضمن الصفيحة القشرية، و ij تمثلان موقع المتغير التصميمي T ضمن الطبقة الواحدة

قمنا بحساب التردد الأساسي باستخدام برنامج ABAQUS باستخدام مبدأ العناصر المنتهية.

إن تغير الصلابة يؤدي إلى خصائص صلابة فريدة ومميزة من نوعها لكل عنصر، والتي تم حسابها باستخدام طرق تتبع خصائص المادة والتي تم استعراضها في الفصل السابق. لقد تم تنفيذ حساب تغير الصلابة التي بدورها أدت إلى الحصول على التوجيه الأمثل للألياف وبالتالي الانحناء الأمثل عن طريق برنامج ABAQUS باستخدام عناصر القشرية S_4 مع استخدام الكود البرمجي UGENS لحساب التحليل غير الخطي لخصائص الصفيحة.

يتميز العنصر القشري S_4 بأنه عنصر قشري غشائي محدود الانفعال يستخدم للتحليل العام، يحتوي على 4 عقد وأربع نقاط تكامل. يعتبر الكود البرمجي UGENS هو كود تم كتابته بلغة الفورتران، يستخدم لأجل تعريف السلوك الميكانيكي غير الخطي للمقطاع القشرية بشكل مباشر من خلال تحديد المقادير الهندسية لحساب المقطع، كما يتيح هذا الكود البرمجي لنا تحديد سلوك المقطع للصفيحة القشرية وإيجاده مباشرة من خلال القوى والإجهادات الغشائية، و تغيرات المنحني، وعزوم الانحناء. أي أن هذا الكود يختصر علينا مراحل حسابية كثيرة أثناء العمل. والذي يمكن أن يتم من خلاله تحليل الصلابة القشرية لكل نقطة تكامل في برنامج ABAQUS. تم حساب التسلسل الطبقي المحلي بالاعتماد على موضع العنصر،

خصائص المادة، وتعريف الصفيحة. بعد ذلك تم حساب المصفوفة ABD باستخدام نظرية الصفائح التقليدية ثم بعد ذلك قمنا بإدخال المصفوفة على برنامج ABAQUS وفق الخوارزمية التالية:



$Maximize$ M_{cr} للصافئح الثابتة السماكة

$\bar{M}_{cr}$ للصفائح المتداخلة الألياف

$Subjected\ to\ T_i^k \geq 1^o\ \ for\ i = 0,1,2,3\ and\ 4, and\ k$

$= 1, \dots, N_p$ للصفائح ثابتة السماكة

$T_i^k \geq 10^o\ \ for\ i = 0,1,2,3\ and\ 4, and\ k$

$= 1, \dots, N_p$ للصفائح متداخلة الألياف (2.3)

تعد الكتلة الإنشائية للصفائح الثابتة السماكة متطابقة مع حدود الأسطوانية. وهذا ما يسمح لنا بإجراء مقارنة مباشرة لحمل التحنيب M_{cr}. لذلك تم اقتراح تابع هدف جديد وهو عزم التحنيب النوعي ويعطى بالعلاقة:

$$\bar{M}_{cr} = \frac{M_{cr}}{m}$$

فمن أجل الصفائح المتداخلة سنأخذ بعين الاعتبار الكتلة الإنشائية المضافة وذلك عند وجود مسارات متداخلة ضمن الطبقة الواحدة، إذ إن m هي كتلة الأسطوانة. تم إجراء النمذجة التي ركزت على تكبير حمل التحنيب تحت تأثير الانحناء مع وجود قيود على القيمة الصغرى لزاوية الليف. إن مجال زاوية الليف للصفائح ثابتة السماكة يجب أن يكون أكبر أو يساوي 1^o. والتي نشأت من تعريف الطبقة في التغير المحيطي للزاوية. ولا يمكن لمسار الليف أن يستمر حول المحيط عندما يكون أحد المتغيرات التصميمية 0^o ، والذي يؤدي إلى مشاكل عددية في حساب خصائص الطبقة. ولأجل هذا السبب يجب أن تكون المتغيرات التصميمية مساوية أو أكبر من 1^o.

إن الحد الأدنى لزاوية توجيه الألياف في الصفائح متداخلة الألياف هو 10^o، لأن زاوية الليف الدنيا ذات القيمة 1^o يمكن أن تؤدي إلى سماكة للطبقة بمعدل 58 طبقة محلية، والذي يؤدي إلى تصاميم غير قابلة للتطبيق. تم تخفيض العدد الأعظمي للتداخلات ضمن طبقة واحدة إلى 6 وذلك عن طريق ضبط زاوية الليف الصغرى على قيمة 10^o والذي يؤدي إلى التصميم المجدي.

تم استعراض النتائج في الجدول **(2)** الذي يحوي على الصفائح القشرية بنوعيها ثابتة الصلابة ومتغيرة الصلابة مع التسلسل الطبقي الموضح، حيث تم مقارنة النتائج بالنسبة إلى الصفيحة القشرية ذات الترتيب الطبقي الآتي $[\pm 45, 0_2, \pm 45, 90, 0, 90, \pm 45, 90]_s$. تم حساب القيمة النظرية $\mathbf{M_{th}}$ وفقاً لـ **[10].**

الجدول (2) نتائج النمذجة للحالة الأولى مقارنة مع العينة المرجعية $[\pm 45, 0_2, \pm 45, 90, 0, 90, \pm 45, 90]_s$

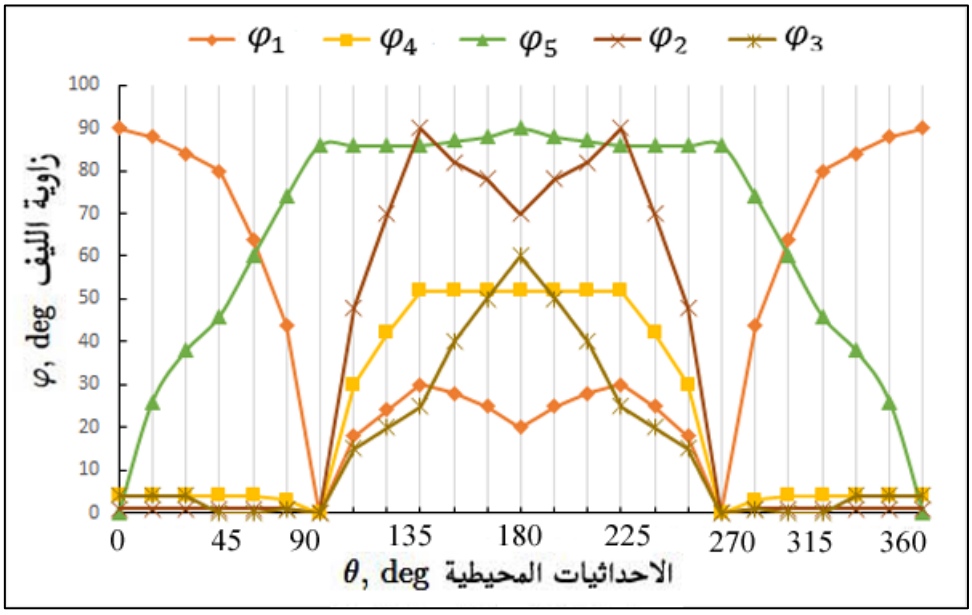
رقم الصفيحة القشرية	عزم التحنيب النظري M_{th}(kNm)	عزم التحنيب M_{cr}(kNm)	مقارنة مع العينة المرجعية% $\frac{M_{cr}-M_{crR}}{M_{crR}} \times 100$	عزم انهيار المادة M_f(kNm)	مقارنة مع العينة المرجعية% $\frac{M_f-M_{fR}}{M_{fR}} \times 100$
العينة المرجعية	623	627	0	575	0
CS-1	627	628	0.16	455	-20.8
CS-2	628	623	-0.64	560	-2.6
CS-3	614	601	-4.15	567	-1.4
VS-1	-	809	+29	478	-11.9
VS-2	-	797	+11	582	+1.2
VS-3	-	724	-0.4	682	+18.6
VS-4	-	807	+28.7	304	-47
VS-5	-	707	+12.8	237	-58.8

والجدول **(3)** يبين زوايا توجيه الطبقات للصفائح الثابتة الصلابة.

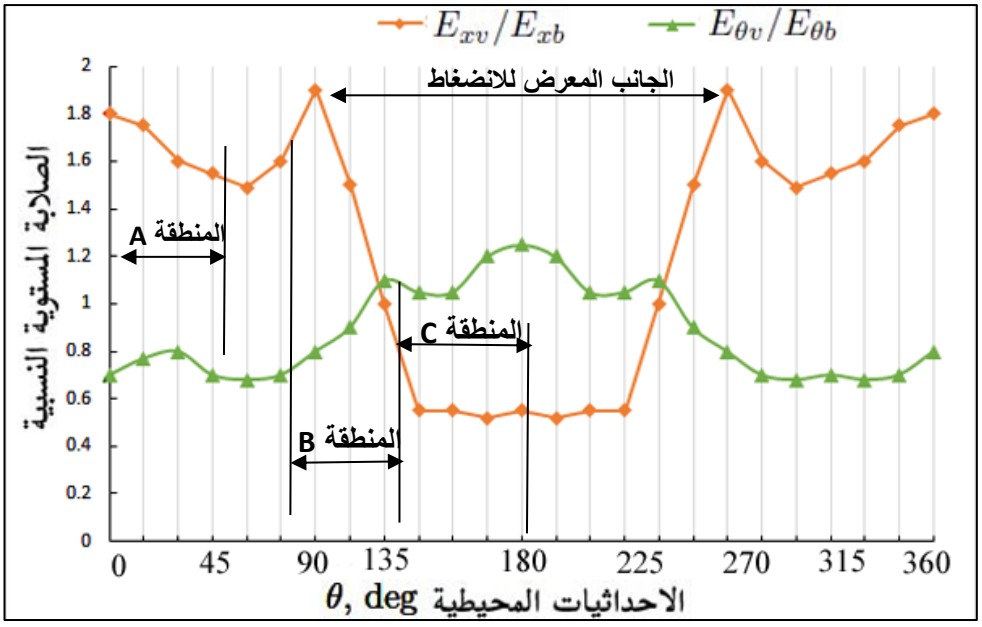
الجدول (3) الزوايا المثالية للطبقة لأجل الصفائح الثابتة الصلابة الحالة الأولى

الصفيحة المدروسة	$\phi_1(°)$	$\phi_2(°)$	$\phi_3(°)$	$\phi_4(°)$	$\phi_5(°)$
CS-1	8.4	41.1	89.8	73.1	48
CS-2	25.5	-	48.7	-	75.8
CS-3	-	42.5	-	66.6	-

يبين الشكل **11** تغير زاوية الليف لكل طبقة بالنسبة للإحداثيات المحيطية و الشكل **12** يُظهر نتائج تغيرات الصلابة المحورية $\mathbf{E_x}$ والصلابة المحيطية $\mathbf{E_\theta}$ بالنسبة للإحداثيات المحيطية منسوبة نسبة للصلابة المستوية للصفيحة المرجعية (معلمة باللاحقة **b**).



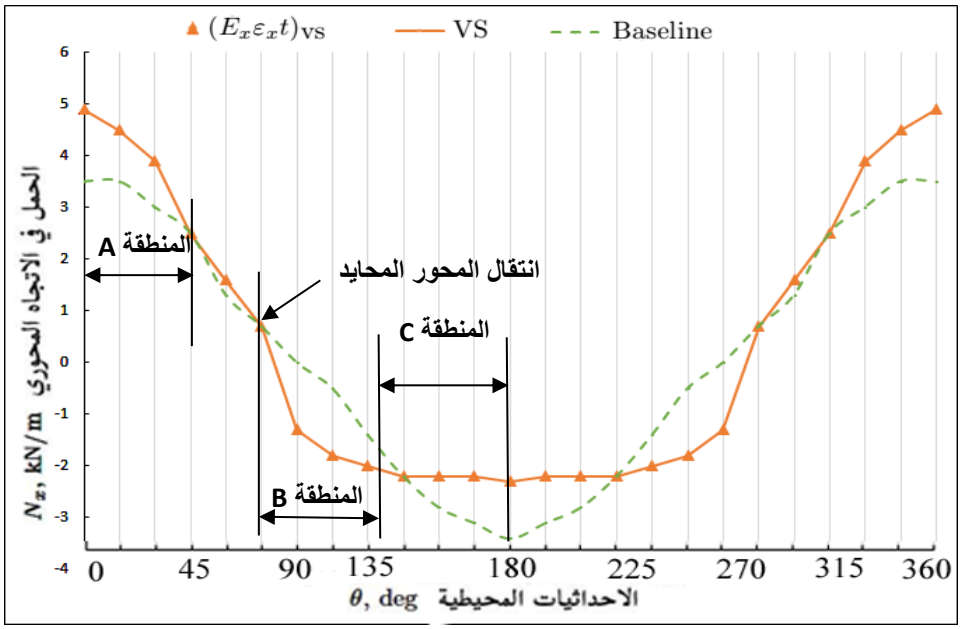
الشكل(11) تغير زاوية الليف لكل طبقة



الشكل(12) تغير الصلابة المحورية والمحيطية

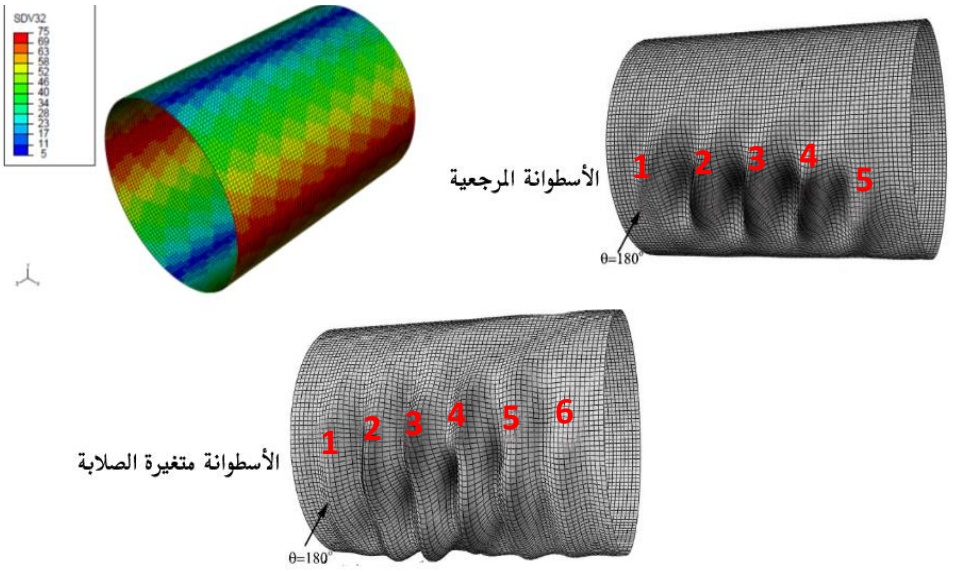
نلاحظ أن الصلابة المحورية للأسطوانة متغيرة الصلابة الشكل(12) كبيرة بشكل واضح في الناحية المعرضة للشد على المحور المحايد، و أكبر من قيمة الصلابة المحورية للأسطوانة المرجعية، أي عند قيمة الزاوية $0^o < \theta < 110^o$، بينما كانت الصلابة في الجهة المعرضة للضغط أصغر من قيمة الصلابة للصفيحة المرجعية.

نتيجة لذلك فإن المحور المحايد للأسطوانة تحرك باتجاه المنطقة المعرضة للشد من الزاوية $\boldsymbol{\theta = 90^o}$ إلى $\boldsymbol{\theta = 77^o}$. يمكن رؤية الانتقال في المحور المحايد في مخطط توزع الانفعال المحوري الشكل(13) الذي يمثل كيفية انتقال المحور وفق الإحداثيات المحيطية للصفيحة الأسطوانية متغيرة الصلابة.



الشكل(13) العلاقة بين الاحداثيات المحيطية والانفعال المحوري

الأشكال **(14)** توضح صيغ التحنيب للأسطوانات المرجعية والأسطوانة متغيرة الصلابة



الشكل(14) صيغة التحنيب الأولى للأسطوانة المرجعية والأسطوانة VS-1 الناتجة عن النمذجة

خامساً مناقشة النتائج:

1- قمنا بإيجاد العلاقة **(32)** والتي يمكن أن تحدد المسار غير الخطي لليف على الصفيحة القشرية المنحنية والذي يأخذ بعين الاعتبار تابعية هذا المسار لأكثر من إحداثي مما يعطي حرية أكبر في النمذجة.

2- تم الوصول إلى العلاقات التي تحدد مسار الانحناء لليف على سطح الصفيحة المخروطية والأسطوانية وذلك بتحديد قيمة زاوية الليف. يشار للمعادلة والتي قمنا بإيجادها أيضاً **(45)** على انها الانحناء k، خلال عملية التصميم، وهو يتعلق بقيود الانحناء. تعتمد قيمة الانحناء على تغيير توجيه الليف وعلى الشكل الهندسي للمخروط. وعندما تكون

الصفيحة القشرية على شكل أسطوانة حيث يكون القطر **R** ثابتاً وزاوية المخروط صفراً يمكن كتابة المعادلة الخاصة بالأسطوانة بالشكل**(48)**.

3- تم تحديد الصفيحة القشرية المرجعية المثلى لتكون متماثلة الخواص في المستوي خلال التسلسل الطبقي $[\pm 45, 0_2, \pm 45, 90, 0, 90, \pm 45, 90]_s$. وقد تبين أن الأسطوانات ثابتة الصلابة ذات توجيه الألياف غير تقليدي تمتلك عزوم تحنيب متوافقة مع عزم التحنيب للأسطوانة المرجعية.

4- في الشكل**(13)** يلاحظ أن أحمال الشد في الأسطوانة متغيرة الصلابة في المنطقة **A** كانت أكبر بشكل واضح من تلك الأحمال في الأسطوانة المرجعية بسبب الصلابة العالية في هذه المنطقة، أكبر بـ **1.8** مرة من الصلابة المرجعية. ويؤدي انتقال المحور المحايد إلى أحمال انضغاط في المنطقة **B** للأسطوانة متغيرة الصلابة، بينما الأحمال في الأسطوانة المرجعية هي أحمال شد وضغط.

5- إن القمة الكبرى في الصلابة المحورية عند الزاوية $\boldsymbol{\theta = 90}$ في المنطقة **B** تجعل من مادة الأسطوانة أكثر فعالية في نقل أحمال الانضغاط. كما أن الصلابة المحورية المنخفضة للأسطوانة متغيرة الصلابة في المنطقة **C** تؤدي إلى تسطح منحني الحمل على الجانب المعرض للانضغاط في الأسطوانة، مؤدية إلى قيم لأحمال الانضغاط أصغر بـ **30%** مقارنة بالأحمال التي تنقلها الأسطوانة المرجعية. تتأثر صيغ التحنيب أيضاً بالتوزع غير المنتظم للصلابة بالإضافة لقيمة عزم التحنيب.

6- إن صيغة التحنيب الأولى للأسطوانة المرجعية في الشكل **(14)** تتألف من **5** موجات كاملة في الاتجاه المحوري ونصف موجة في الاتجاه المحيطي. وصيغة التحنيب للأسطوانة متغيرة الصلابة، تتألف من ست موجات كاملة في الاتجاه المحوري وثلاثة أنصاف موجات في الاتجاه المحيطي. الاختلاف الأكثر وضوحاً بين نماذج التحنيب هي المساحة التي تغطيها عمليات التحنيب، والتي أثرت على قيمة حمولة التحنيب. فمواقع التحنيب في الأسطوانة

المتغيرة الصلابة**VS-1**غطت قطاع أكبر في الأسطوانة من مواقع التحنيب التي غطت العينة المرجعية. هذه نتيجة مباشرة لتوزع الصلابة غير المنتظم الذي وزع قيمة حمل الانضغاط على مجال أكبر من الأسطوانة.

7- تم إجراء اختبارات تجريبية على صفائح مواد مركبة مستوية ذات ألياف مستقيمة أي ذات توجيه بزاوية واحدة لليف، أما بالنسبة للصفائح ذات الألياف المنحنية والتي تمتلك عدة زوايا توجيه لليف الواحد كما في بحثنا الحالي فلم نقم بإجراء التجارب التصنيعية بسبب عدم إمكانية التصنيع لهذا النوع من الصفائح يدوياً وهو بحاجة لآلة مبرمجة تقوم بعملية الحياكة وهي غير متوفرة، لذلك اقتصر البحث في هذا الجزء على عملية نمذجة لهذا النوع من الصفائح.

سادساً المراجع:

[1] GÜRDAL Z., and OLMEDO R. A., 1992 - **Composite laminates with spatially varying fiber orientations: Variable stiffness panel concept.** Structural Dynamics and Materials Conference, AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 33rd Structures, Dallas, TX, volume2, pages 798–808.

[2] GÜRDAL, Z., TATTING B, F., & WU C,K., 2008 - **Variable stiffness composite panels: effects of stiffness variation on the in-plane and buckling response.** Composites Part A: Applied Science and Manufacturing, DOI: 10.1016/j, 39(5):911–922.

[3] IJSSELMUIDEN, ST., GÜRDAL, Z., SETOODEH, S., ABDALLA, MM., 2008- **Design of variable stiffness composite panels for maximum buckling load**. Compos Struct 87.

[4] LOPES, CS., CAMANHO, PP., GÜRDAL, Z., Tatting, BF., 2007 - **Progressive failure analysis of tow-placed variable-stiffness composite panels**. Int J Solids Struct.

[5] SETOODEH, S., ABDALLA, M. M., and GÜRDAL, Z., 2005- **Design of variable-stiffness composite laminates for maximum in-plane stiffness using lamination parameters**. Structural Dynamics and Materials Conference, In **46th** AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Austin, TX, USA, AIAA.

[6] ALHAJAHMAD, A., ABDALLA, M. M., and GÜRDAL, Z., 2006 - **Design tailoring for pressure pillowing using tow placed steered fibers**. SAMPE '16th Fall Technical Conference, Dallas, Texas.

[7] SETOODEH, M., ABDALLAH, M., and GÜRDAL, Z., 2006 - **Design of variable stiffness laminates using lamination parameters. Composites**. Part B: Engineering, 37:301–309.

[8] TATTIN, F., and GÜRDAL, Z., 2002 - **Design and manufacture of elastically tailored tow placed plates**. Technical report NASA/CR-211919, USA**.**

[9] LOPES, S., CAMANHO, P. P., GÜRDAL, Z., and Tatting**,** B. F., **Progressive failure analysis of tow-placed, variable-stiffness composite panels.** International Journal of Solids and Structures, 44(25-26):8493–8516, 2007. 10.1016/j. ijso l rst. 2007.06.029.

[10] FUCHS, P., STARNES, J. H., and HYER, M. W., **Collapse of composite cylinders in bending.** In Proceedings of the 38th AIAA/ASME/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials (SDM) Conference, Kissimmee, FL, US, Apr 1997. AIAA.