

## النموذج الرياضي لمحرك احتراق داخلي أثناء عمله

م. يوسف حسون، د. مصطفى طالب

كلية الهندسة الميكانيكية، جامعة إدلب

### الملخص:

سنعرض في هذا البحث النموذج الرياضي اللازم لوصف نظام عمل محرك احتراق داخلي رباعي الأسطوانات، رباعي الأشواط، حيث سيتم عرض معادلة الحركة لهذا النظام في حالة الاهتزازات الحرة والقسرية واستنتاج عناصر هذه المعادلة جميعها. وسيكون محرك الاحتراق الداخلي المدروس مرتبطاً أيضاً بعلبة السرعة ويمثلان جسماً صلباً واحداً ذات درجات حرية.

**الكلمات المفتاحية:** النموذج الرياضي، الاهتزاز الحر، الاهتزاز القسري

## **Mathematical Modeling of an Internal Combustion Engine in Action**

ENG. Yousef Hassoun, Dr. Mostafa Taleb

**Faculty of Mechanical Engineering at Idleb University**

### **Abstract:**

In this research, we will present the mathematical model necessary to describe the motion of a four-cylinder, four-stroke internal combustion engine, where the equation of motion for this in the case of free and forced vibrations will be presented and all the elements of this equation will be deduced. The considered internal combustion engine will also be connected to the gearbox and represent one solid body with six degrees of freedom.

**Key words:** mathematical model, free vibrations, forced vibrations.

**1-المقدمة:**

إن الهاجس الرئيسي في معالجة أي مسألة ديناميكية يكمن في إيجاد النموذج الرياضي (الديناميكي) للآلة المدروسة أي أن دراسة ديناميك الآلات يجب أن تبدأ باختيار النماذج الرياضية للأجزاء الوظيفية للآلة.

يعرف النموذج الرياضي بأنه مجموعة العلاقات الرياضية التي تربط بين مختلف المتحولات والتي تسهم في تمثيل سلوك فيزيائي معين. وتعد المقدره على الانتقال من النظام الفيزيائي PHYSICAL SYSTEM إلى النموذج الرياضي الذي يصف هذا النظام أمراً حيوياً يسهل بعده حل المسألة. وتجدر الإشارة إلى أن النموذج الرياضي لا يمثل النظام الفيزيائي الحقيقي بشكل كامل، بل يعد تمثيلاً تقريبياً له، وإن اختيار النموذج الرياضي لآلة معينة يتعلق في بادئ الأمر بالغرض من الدراسة وبطبيعة المسألة المدروسة وبإمكانية حلها ضمن الإمكانيات والطرق المتاحة. يجب أثناء اختيار النموذج الرياضي الديناميكي للجزء الوظيفي من الآلة فرز صفات هذا الجزء والتي تعد مهمة بالنسبة للمسألة موضوع الدراسة وإهمال تلك الصفات المعتبرة غير مهمة لتلك المسألة، أي بما معناه نمذجة النظام الحقيقي. لذلك يمكن أن يكون للجزء الوظيفي الواحد أكثر من نموذج رياضي وذلك حسب موضوع الدراسة.

يبدأ اختيار النموذج الرياضي من اختيار الشكل الحركي للنظام الميكانيكي وتحديد الحدود القائدة المتصلة بالمحركات وتحديد الأجزاء العاملة التي تؤثر فيها قوى المقاومة.

ومن الواضح أنه لدى بناء النموذج الرياضي لأية مسألة لا بد من اعتماد بعض الفرضيات التبسيطية التي تعتمد على كل من طبيعة المسألة، والدقة المطلوبة وعلى المعلومات والأدوات الحسابية المتوافرة (الشحادة، وعمران, 2016).

تم إعداد نموذج ديناميكي لنظام مؤلف من مكبس وذراع التوصيل مع المرفق، حيث تم قياس سرعة الذبذبات للجدع المعقوف كما تم قياس الاهتزازات لكنتلة المحرك، وأوضح أن للنموذج الديناميكي أربع درجات حرية. ووجد أن الاهتزازات في الاتجاهين الأفقي والرأسي ناتجة عن عدم التوازن في الجذع المعقوف، ووجد أن الوزن المعدل المستعمل للإقلال من الاهتزازات الرأسية والأفقية يخفض الاهتزاز فقط في الاتجاه الرأسي، ووجد أن معامل المرونة والإخماد

المثاليين هما (spring and damping)  $100 \text{ kN/m}$  ,  $1000\text{N/(m/S)}$  على التوالي (Öztürk, et al., 2012).

تمت دراسة اهتزازات المكونات الرئيسية للمحرك بسبب الاحتراق، حيث تم تقديم نموذج ديناميكي يعتمد على معادلة لاغرانج. وتمت دراسة تأثير كل المكونات في المحرك في إنتاج الصوت والاهتزاز بدقة في النموذج. تضمن هذا النموذج مصفوفة الكتلة ومصفوفة السرعة وتم الحصول على مكوناتها كوظائف دورية فيما يتعلق بوقت تطبيق النموذج على البيانات المستلمة من محرك OM-355 المصنّع من قبل مصنع Idem، ومن الممكن تحليل الضجيج والاهتزاز الناتج عن ظاهرة الرنين في جسم المحرك. وخلص إلى أن انتشار الضجيج الناتج عن نمط الاهتزاز السادس يزداد بشكل كبير في كتلة المحرك، وخاصة من الجذع المعقوف. النتائج التي تم الحصول عليها من هذا البحث يمكن استخدامها لتصميم المحرك (مهدي وآخرون في عام 2009).

تم بحث إمكانية تحليل الاهتزاز للكشف المبكر عن أخطاء حقن الوقود في محرك احتراق داخلي، ذي ست أسطوانات يعمل بالديزل. تم عرض المصادر الرئيسية لاهتزاز محرك الديزل، وكذلك آلية تولد هذه المصادر في بنية المحرك. تم تخفيض ضغط الحقن في واحدة من الأسطوانات تدريجياً من قيمتها الاسمية، على التوالي، بنسبة 10 - 50%. وقد تم الحصول على إشارتين باستخدام بطاقة اكتساب ديناميكية تمثيلية رقمية. الأولى هي إشارة Top Dead Center (TDC) في الأسطوانات رقم 1 المقاسة باستخدام حساس استقرائي، والثانية هي إشارة الاهتزاز التي تم قياسها، على رأس الأسطوانة للمحرك باستخدام مقياس تسارع كهروضغطي. وقد تم تحليل إشارة الاهتزاز في مجال زاوية الجذع المعقوف ومجال التردد باستخدام تحليل فورييه السريع، وفي مجال التردد الزاوي باستخدام تحويل فورييه القصير. أظهر تحليل إشارات خطأ الحقن في المجالات الثلاثة أنه في مجال زاوية الجذع المعقوف يعطي التحليل المرئي معلومات محدودة وفي مجال التردد، يتعذر تحديد الأسطوانة مع الحاقن الخاطئ، وفي مجال التردد الزاوي، يكون اكتشاف خطأ الحقن وتحديد الأسطوانة المعطلة أمراً ممكناً ومعقداً (Ftoutou, et al., 2018).

تعرف الاهتزازات الميكانيكية بأنها حركة ذنبية الأجسام وقد تم الاصطلاح فيما سبق أيضا على أن الاهتزازات الميكانيكية هي عبارة عن حركات دورية تتكرر بشكل منتظم خلال فترة زمنية محددة. ولكن بعد تقدم العلوم وطرق التحليل الرياضية وكذلك تطور أجهزة قياس الحركات، أصبح التعريف السابق غير شامل لكل الحركات الاهتزازية. لذلك قبل البدء بدراسة علم الاهتزازات لا بد من دراسة علم الحركة فيما يخص السرعة والتسارع (النجار، 1981).

تعتبر دراسة الاهتزازات من أهم الدراسات الديناميكية لأنها ترتبط بكتلة وصلابة النظام المدروس، وإجمالاً كل نظام مهتز ذي كتلة وصلابة فهو نظام مهتز، وهذه حالة الأنظمة الميكانيكية جميعها (الفارس، 1989).

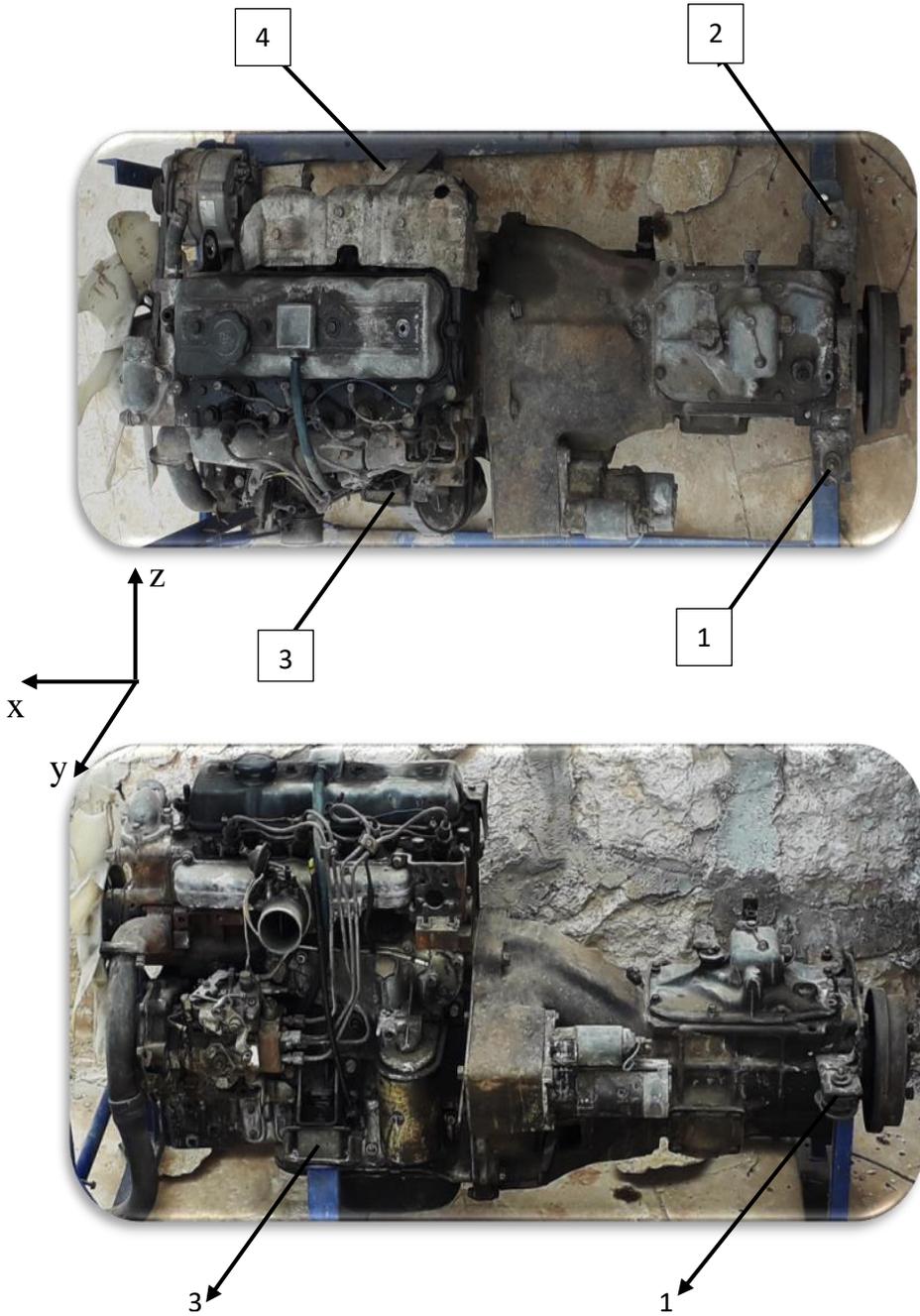
## 2- النموذج الرياضي:

سنعرض في هذه الفقرة النموذج الرياضي اللازم لوصف نظام عمل محرك احتراق داخلي مع الأخذ بالاعتبار أن لهذا المحرك ست درجات حرية. حيث سيتم عرض معادلة الحركة لهذا النظام واستنتاج عناصر هذه المعادلة جميعها. وسيكون محرك الاحتراق الداخلي المدروس مرتبطاً أيضاً بعلمة السرعة ويمثلان جسماً صلباً واحداً ذا ست درجات حرية. وسيكون هذا المحرك متصلاً بالهيكل بواسطة أربعة أرجل كما هو موضح بالشكل أدناه.

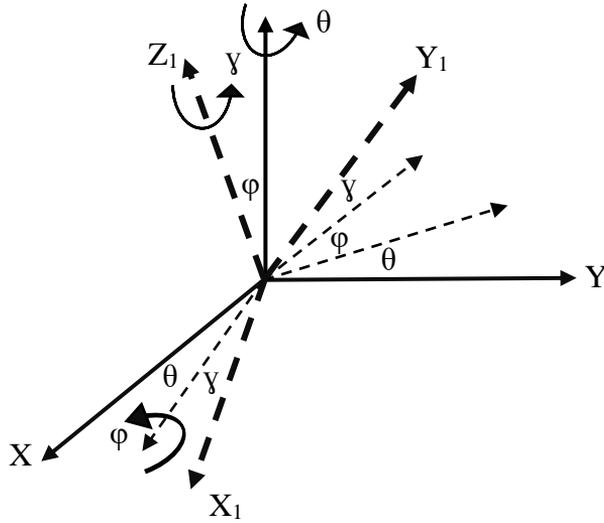
تتمتع كل رجل من أرجل المحرك بصلابة معينة على كل محور من المحاور الإحداثية الجديدة

(  $X_1, Y_1, Z_1$  ) الناتجة عن دوران المحاور الإحداثية الأساسية (  $X, Y, Z$  ) بزوايا أويلر (  $\theta, \phi, \psi$  ) على الترتيب وبالتالي سيكون للرجل الأولى الصلابات التالية: (  $K_{X1}, K_{Y1}, K_{Z1}$  ) كما هو موضح بالشكل (2-2).

علماً أن هذه الصلابات ستبقى ثابتة بعد الدوران بزوايا أويلر، أي أنها تكافئ الصلابات (  $K_X, K_Y, K_Z$  ) وفق المحاور الإحداثية الأساسية. وبشكل مماثل سيكون لباقي أرجل المحرك الصلابات التالية:



شكل (2-1) المحرك مع علبة السرعة موضح عليه أماكن توضع المساند (أرجل المحرك).



الشكل (2-2) المحاور الإحداثية الجديدة بعد الدوران بزوايا أويلر للمحاور الإحداثية الأساسية

$$(K_{X4}, K_{Y4}, K_{Z4}), \quad (K_{X3}, K_{Y3}, K_{Z3}), \quad (K_{X2}, K_{Y2}, K_{Z2})$$

ويمكن ان نعبر عن صلابة كل رجل من أرجل المحرك بالشكل المصفوفي التالي:

$$K_1 = \begin{bmatrix} K_{X1} & 0 & 0 \\ 0 & K_{Y1} & 0 \\ 0 & 0 & K_{Z1} \end{bmatrix} \quad (2-1)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} K_{X2} & 0 & 0 \\ 0 & K_{Y2} & 0 \\ 0 & 0 & K_{Z2} \end{bmatrix} \quad (2-2)$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} K_{X3} & 0 & 0 \\ 0 & K_{Y3} & 0 \\ 0 & 0 & K_{Z3} \end{bmatrix} \quad (2-3)$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} K_{X4} & 0 & 0 \\ 0 & K_{Y4} & 0 \\ 0 & 0 & K_{Z4} \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

نتيجة لدوران المحرك وفق زوايا أويلر سيكون هناك انتقال لكافة نقاطه ومن نقاط استناده إلى الجسم وقاعدة الاستناد ولتحديد هذه الانتقالات نقوم بما يلي:

1- ندور جسم المحرك بزاوية  $\theta$  حول المحور  $Z$  فتدور الجملة الإحداثية المرتبطة به

ونحصل على جملة جديدة  $(\hat{X}, \hat{Y}, Z)$  كما في الشكل a .

2- ندور جسم المحرك بزاوية  $\phi$  حول المحور  $\hat{X}$  الجديد كما في الشكل b .

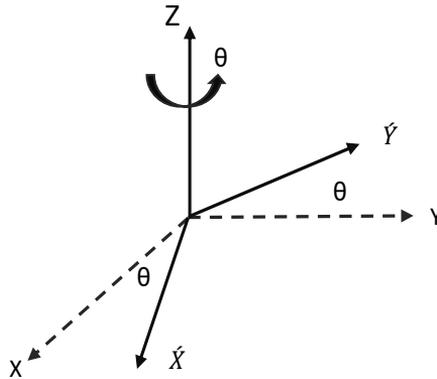
3- ندور جسم المحرك بزاوية  $\gamma$  حول المحور  $Z_1$  الجديد كما في الشكل c .

بعد الدوران الأول ستصبح إحداثيات نقطة ما بالفراغ على الشكل التالي:

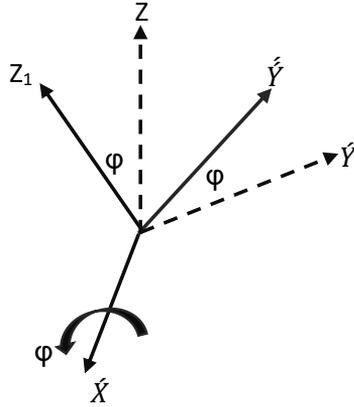
$$\hat{X} = X \cdot \cos \theta + Y \cdot \sin \theta \quad (2-5)$$

$$\hat{Y} = Y \cdot \cos \theta - X \cdot \sin \theta \quad (2-6)$$

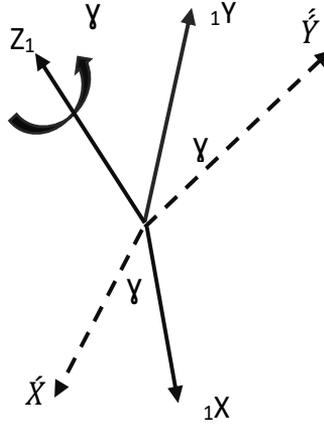
$$\begin{bmatrix} C\theta & S\theta & 0 \\ -S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-7) \quad \text{ومنه نجد:}$$



(a)



(b)



(c)

الشكل (2-3) أشكال الدورانات وفق الزوايا  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\gamma$ 

بعد الدوران الثاني ستصبح إحداثيات تلك النقطة من الفراغ على الشكل الآتي:

$$Z_1 = Z \cdot \cos \varphi - \hat{Y} \cdot \sin \varphi \quad (2-8)$$

$$\hat{Y} = \hat{Y} \cdot \cos \varphi + Z \cdot \sin \varphi \quad (2-9)$$

ومنه نجد:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\varphi & S\varphi \\ 0 & -S\varphi & C\varphi \end{bmatrix} \quad (2-10)$$

بعد الدوران الثالث ستصبح إحداثيات تلك النقطة من الفراغ على الشكل التالي:

$$X_1 = \hat{X} \cdot \cos \gamma + \hat{Y} \cdot \sin \gamma \quad (2-11)$$

$$Y_1 = \hat{Y} \cdot \cos \gamma - \hat{X} \cdot \sin \gamma \quad (2-12)$$

ومنه نجد:

$$\begin{bmatrix} C\gamma & S\gamma & 0 \\ -S\gamma & C\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-13)$$

يمكننا الآن كتابة مصفوفة الدوران العامة التي تربط الإحداثيات الأساسية بالإحداثيات الجديدة كنتيجة للدورانات الثلاثة السابقة:

$$A = \begin{bmatrix} C\theta & S\theta & 0 \\ -S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\varphi & S\varphi \\ 0 & -S\varphi & C\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\gamma & S\gamma & 0 \\ -S\gamma & C\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-14)$$

$$A = \begin{bmatrix} C\gamma C\theta - C\varphi S\theta S\gamma & -S\gamma C\theta - C\varphi S\theta C\gamma & S\theta S\varphi \\ C\gamma S\theta + C\varphi C\theta S\gamma & -S\gamma S\theta + C\varphi C\theta C\gamma & -S\varphi C\theta \\ S\varphi S\gamma & S\varphi C\gamma & C\varphi \end{bmatrix} \quad (2-15)$$

بما أن زوايا الدوران صغيرة فإنه يمكن اعتبار ما يلي:

- $\cos \theta = \cos \varphi = \cos \gamma = 1$
- $S\varphi = \varphi, S\theta = \theta, S\gamma = \gamma$

كما يمكن إهمال ناتج جداء أي زاويتين أو تريبعهما.  
ومنه فإن المصفوفة السابقة A تصبح مصفوفة واحدة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-16)$$

بعد تدوير المحرك ستحدث انتقالات في جميع نقاطه بما في ذلك مسانده وهذه الانتقالات ستكون بالاتجاه الموجب أو السالب وفق كل محور من المحاور الإحداثية كما يلي:

1- الانتقالان لأحد المساند بنتيجة دوران المحرك حول المحور X بزاوية  $\theta$  هما على التوالي:

$$L_{z1} = C_{y1} \cdot \theta \quad , \quad -L_{y1} = C_{z1} \cdot \theta$$

2- الانتقالان لأحد المساند بنتيجة دوران المحرك حول المحور Y بزاوية  $\phi$  هما على التوالي:

$$L_{x1} = C_{z1} \cdot \phi \quad , \quad -L_{z1} = C_{x1} \cdot \phi$$

3- الانتقالان لأحد المساند بنتيجة دوران المحرك حول المحور Z بزاوية  $\gamma$  هما على التوالي:

$$-L_{x1} = C_{y1} \cdot \gamma \quad , \quad L_{y1} = C_{x1} \cdot \gamma$$

باعتبار أن إحداثيات مساند المحرك هي:

$$L_1 (L_{x1}, L_{y1}, L_{z1}) \quad , \quad L_2 (L_{x2}, L_{y2}, L_{z2})$$

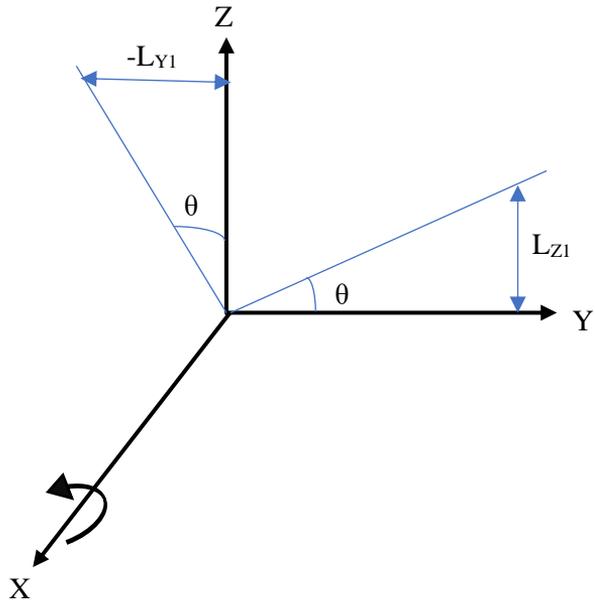
$$L_3 (L_{x3}, L_{y3}, L_{z3}) \quad , \quad L_4 (L_{x4}, L_{y4}, L_{z4})$$

إذ تمثل الإحداثيات السابقة بعد مركز كل مسند من مساند المحرك عن مركز ثقل المحرك C.G وذلك بفرض أن مبدأ الإحداثيات الأساسية متطابق مع مركز ثقل المحرك. نتيجة للعلاقات الثلاث السابقة فإننا نحصل على المصفوفة التالية لانتقال رجل المحرك الأولى نتيجة للدورات السابقة:

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -L_{Z1} & L_{Y1} \\ L_{Z1} & 0 & -L_{X1} \\ -L_{Y1} & L_{X1} & 0 \end{bmatrix} \quad (2-17)$$

وبشكل مماثل لبقية الأرجل يمكن أن نجد:

$$\mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -L_{Z2} & L_{Y2} \\ L_{Z2} & 0 & -L_{X2} \\ -L_{Y2} & L_{X2} & 0 \end{bmatrix} \quad (2-18)$$



الشكل (2-4) الانتقالات الناتجة عن الدوران بالزاوية  $\theta$

$$\mathbf{L}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -L_{Z3} & L_{Y3} \\ L_{Z3} & 0 & -L_{X3} \\ -L_{Y3} & L_{X3} & 0 \end{bmatrix} \quad (2-19)$$

$$L_4 = \begin{bmatrix} 0 & -L_{Z4} & L_{Y4} \\ L_{Z4} & 0 & -L_{X4} \\ -L_{Y4} & L_{X4} & 0 \end{bmatrix} \quad (2-20)$$

$$L_1 (-59.5, 16, -5) \quad , \quad L_2 (-59.5, -14, -5)$$

$$L_3 (23, 22.5, -11.5) \quad , \quad L_4 (23, -20.5, -11.5)$$

فإذا أجرينا تحويلاً للانتقالات الواردة في العلاقات السابقة (20-2),(19-2),(18-2),(17-2) من المحاور الإحداثية الجديدة  $(X_1, Y_1, Z_1)$  إلى الإحداثية الأساسية  $(X, Y, Z)$  وذلك عن طريق ضربها بمصفوفة التحويل  $A$  فإننا سنحصل على العلاقات السابقة نفسها وذلك باعتبار أن المصفوفة  $A$  هي مصفوفة واحدة.

سنقوم الآن بأخذ جداء لمصفوفات الصلابة (2-2),(3-2),(4-2) بمصفوفات الانتقال المقابلة لها (20-2),(19-2),(18-2),(17-2) على التوالي وذلك للحصول على قوة الإرجاع

$$: F = -K \cdot L$$

$$F_1 = - \begin{bmatrix} K_{X1} & 0 & 0 \\ 0 & K_{Y1} & 0 \\ 0 & 0 & K_{Z1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -L_{Z1} & L_{Y1} \\ L_{Z1} & 0 & -L_{X1} \\ -L_{Y1} & L_{X1} & 0 \end{bmatrix} \quad (2-21)$$

$$F_1 = - \begin{bmatrix} 0 & -K_{X1}L_{Z1} & K_{X1}L_{Y1} \\ K_{Y1}L_{Z1} & 0 & -K_{Y1}L_{X1} \\ -K_{Z1}L_{Y1} & K_{Z1}L_{X1} & 0 \end{bmatrix} \quad (2-22)$$

$$F_2 = - \begin{bmatrix} K_{X2} & 0 & 0 \\ 0 & K_{Y2} & 0 \\ 0 & 0 & K_{Z2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -L_{Z2} & L_{Y2} \\ L_{Z2} & 0 & -L_{X2} \\ -L_{Y2} & L_{X2} & 0 \end{bmatrix} \quad (2-23)$$

$$F_2 = - \begin{bmatrix} 0 & -K_{X2}L_{Z2} & K_{X2}L_{Y2} \\ K_{Y2}L_{Z2} & 0 & -K_{Y2}L_{X2} \\ -K_{Z2}L_{Y2} & K_{Z2}L_{X2} & 0 \end{bmatrix} \quad (2-24)$$

$$F_3 = - \begin{bmatrix} K_{X3} & 0 & 0 \\ 0 & K_{Y3} & 0 \\ 0 & 0 & K_{Z3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -L_{Z3} & L_{Y3} \\ L_{Z3} & 0 & -L_{X3} \\ -L_{Y3} & L_{X3} & 0 \end{bmatrix} \quad (2-25)$$

$$F_3 = - \begin{bmatrix} 0 & -K_{X3}L_{Z3} & K_{X3}L_{Y3} \\ K_{Y3}L_{Z3} & 0 & -K_{Y3}L_{X3} \\ -K_{Z3}L_{Y3} & K_{Z3}L_{X3} & 0 \end{bmatrix} \quad (2-26)$$

$$F_4 = - \begin{bmatrix} K_{X4} & 0 & 0 \\ 0 & K_{Y4} & 0 \\ 0 & 0 & K_{Z4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -L_{Z4} & L_{Y4} \\ L_{Z4} & 0 & -L_{X4} \\ -L_{Y4} & L_{X4} & 0 \end{bmatrix} \quad (2-27)$$

$$F_4 = - \begin{bmatrix} 0 & -K_{X4}L_{Z4} & K_{X4}L_{Y4} \\ K_{Y4}L_{Z4} & 0 & -K_{Y4}L_{X4} \\ -K_{Z4}L_{Y4} & K_{Z4}L_{X4} & 0 \end{bmatrix} \quad (2-28)$$

كما أن مصفوفة الصلابة المكافئة للأرجل الأربعة للمحرك ستكون بالشكل التالي:

$$K = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \quad (2-29)$$

ولإيجاد عناصر هذه المصفوفة:

- 1- عند دوران المحرك سيحصل انتقال للأرجل حول المحور Y لذلك سنقوم بتحصيل ثوابت الصلابة للأرجل الأربعة حول المحور Y باستخدام العلاقة الرياضية التالية:

$$K_0 = \frac{(a+b)^2 \cdot K_1 \cdot K_2}{a^2 \cdot K_2 + b^2 \cdot K_1} \quad (2 - 30)$$

إذ تصف العلاقة السابقة الصلابة المكافئة عند الربط على التوازي.

- نحصل الآن صلابة الرجلين 1 & 3 وفق المعادلة التالية:

$$K_{13} = \frac{(L_{X1} + L_{X3})^2 \cdot K_{X1} \cdot K_{X3}}{L_{X1}^2 \cdot K_{X1} + L_{X3}^2 \cdot K_{X3}} \quad (2 - 31)$$

$$K_{13} = 4428.8 \text{ [N/m]}$$

- نحصل الآن صلابة الرجلين 2 & 4 وفق المعادلة التالية:

$$K_{24} = \frac{(L_{X2} + L_{X4})^2 \cdot K_{X2} \cdot K_{X4}}{L_{X2}^2 \cdot K_{X2} + L_{X4}^2 \cdot K_{X4}} \quad (2-32)$$

$$K_{24} = 4428.8 \text{ [N/m]}$$

- نحصل  $K_{24}$  &  $K_{13}$  باستخدام العلاقة (30-2) فنحصل على  $K_Y$ :

$$K_Y = 29930.02 \text{ [N/m]}$$

-2 لإيجاد الصلابة المكافئة بالاتجاه Z:

$$K_{12} = \frac{(L_{y1} + L_{y2})^2 \cdot K_{y1} \cdot K_{y2}}{L_{y1}^2 \cdot K_{y1} + L_{y2}^2 \cdot K_{y2}} \quad (2-33)$$

$$K_{12} = 628.97 \text{ [N/m]}$$

$$K_{34} = \frac{(L_{y3} + L_{y4})^2 \cdot K_{y3} \cdot K_{y4}}{L_{y3}^2 \cdot K_{y3} + L_{y4}^2 \cdot K_{y4}} \quad (2 - 34)$$

$$K_{34} = 447.43 \text{ [N/m]}$$

- نحصل  $K_{34}$  &  $K_{12}$  باستخدام العلاقة (2-30) فنحصل على  $K_Z$ :

$$K_Z = 152.2 \text{ [N/m]}$$

3- لإيجاد الصلابة المكافئة بالاتجاه  $X$ :

$$K_X = K_Z + K_Y$$

$$K_X = 30082.22 \text{ [N/m]}$$

وبالتالي تكون ثوابت الصلابة على المحاور الثلاثة كما في الجدول التالي:

الجدول (1-2) قيم ثوابت الصلابة على المحاور الثلاثة.

المحور	$K_x=C_{11}$	$K_y=C_{22}$	$K_z=C_{33}$
ثابت الصلابة [N/m]	30082.22	29930.02	152.2

الآن لإيجاد عزم الدوران حول المحاور الإحداثية نقوم بضرب كل قوة من قوى الإرجاع السابقة بالذراع الموافق لها وفق المحور المدروس مع ملاحظة أن قيمة الذراع هي ذاتها المصفوفة  $L_1$  لرجل المحرك الأولى وكذلك لجميع الأرجل بشكل مماثل:

$$M_1 = -L_1 \cdot F_1$$

وعليه تصبح مصفوفة العزم المحصل الكلية كما يلي:

$$M_{tot} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (2-35)$$

$$a_{11} = K_{Y1}L_{Z1}^2 + K_{Z1}L_{Y1}^2 + K_{Y2}L_{Z2}^2 + K_{Z2}L_{Y2}^2 + K_{Y3}L_{Z3}^2 + K_{Z3}L_{Y3}^2 + K_{Y4}L_{Z4}^2 + K_{Z4}L_{Y4}^2$$

$$a_{12} = a_{21} = -K_{Z1}L_{Y1}L_{X1} - K_{Z2}L_{Y2}L_{X2} - K_{Z3}L_{Y3}L_{X3} - K_{Z4}L_{Y4}L_{X4}$$

$$a_{13} = a_{31} = -K_{Y1}L_{Z1}L_{X1} - K_{Y2}L_{Z2}L_{X2} - K_{Y3}L_{Z3}L_{X3} - K_{Y4}L_{Z4}L_{X4}$$

$$a_{22} = K_{X1}L_{Z1}^2 + K_{Z1}L_{X1}^2 + K_{X2}L_{Z2}^2 + K_{Z2}L_{X2}^2 + K_{X3}L_{Z3}^2 + K_{Z3}L_{X3}^2 + K_{X4}L_{Z4}^2 + K_{Z4}L_{X4}^2$$

$$a_{33} = K_{X1}L_{Y1}^2 + K_{Y1}L_{X1}^2 + K_{X2}L_{Y2}^2 + K_{Y2}L_{X2}^2 + K_{X3}L_{Y3}^2 + K_{Y3}L_{X3}^2 + K_{X4}L_{Y4}^2 + K_{Y4}L_{X4}^2$$

$$a_{23} = a_{32} = -K_{X1}L_{Z1}L_{Y1} - K_{X2}L_{Z2}L_{Y2} - K_{X3}L_{Z3}L_{Y3} - K_{X4}L_{Z4}L_{Y4}$$

### 3- النتائج:

بناء على ما تقدم يمكن صياغة النموذج الرياضي في حال الاهتزاز الحر والقسري على الشكل التالي:

$$1- \text{ في حالة الاهتزاز الحر} \\ \cdot [X] = \{0\} \quad \{[K] - \omega^2[I]\}$$

$$2- \text{ في حالة الاهتزاز القسري} \\ \cdot [X] = \{F\} \quad \{[K] - \omega^2[I]\}$$

[K]: مصفوفة الصلابة ذات الشكل التالي:

$$K = \begin{bmatrix} 30082.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 29930.02 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 152.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 44888.8 & 1379.82 & 1253.53 \\ 0 & 0 & 0 & 1379.8 & 208836.55 & 438.02 \\ 0 & 0 & 0 & 1253.53 & 438.02 & 80653.6 \end{bmatrix}$$

[I]: مصفوفة الكتلة والعطالة ذات الشكل التالي:

$$I = \begin{bmatrix} 335.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 335.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 335.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.644 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 25.11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24.142 \end{bmatrix}$$

$[X]$ : شعاع الانتقالات الخطية والدورانية ويعطى بالشكل التالي:

$$[X] = [X \ Y \ Z \ \theta \ \varphi \ \psi]^T$$

$\{F\}$ : شعاع القوى الخارجية المؤثرة على الجملة:

$$\{F\} = \{F_X \ F_Y \ F_Z \ M_X \ M_Y \ M_Z\}^T$$

حيث:

$$F_X = 0$$

$$F_Y = P \left[ \frac{2 \frac{R}{L} \sin \omega t + \sin \omega t \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{R}{L} \cdot \sin \omega t\right)^2} + \frac{R}{L} \cos \omega t \cdot \sin \omega t}{2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{R}{L} \cdot \sin \omega t\right)^2}} \right]$$

$$F_Z = P_g - m_f \cdot R \cdot \omega^2 (\cos \omega t + \lambda \cdot \cos 2\omega t)$$

$$M_Y = 0$$

$$M_Z = 0$$

$$M_X = 2P \cdot R \cdot \sin \omega t \left[ \frac{\frac{R}{L} \cdot \cos \omega t}{\sqrt{1 - \left(\frac{R}{L} \cdot \sin \omega t\right)^2}} + 1 \right]$$

## 4- المناقشة:

- 1- بما أن لكل رجل من أرجل المحرك ثابت صلابة خاصاً بها وفق كل اتجاه من الاتجاهات الثلاثة  $X, Y, Z$  فإنه يجب أن يكون هناك مصفوفة صلابة لكل رجل من أرجل المحرك توضح ثوابت الصلابة لها وفق المحاور الإحداثية الثلاثة.
- 2- نتيجة الانتقال الخطي للأرجل سينتج لدينا قوى إرجاع على كل رجل من أرجل المحرك قيمة كل منها

$$-F=K.L$$

$K$ : ثابت صلابة الرجل

$L$ : الانتقال الخطي  $L.a =$

$L$ : بعد الرجل المدروسة عن محور الإحداثيات قبل الدوران

$\alpha$ : زاوية الدوران.

- 3- نتيجة الدوران بزوايا أولير بفعل العزم الخارجي سينتج لدينا عزوم ناتجة عن قوى المرونة قيمتها تعطى وفق العلاقة التالية:

$$M_1 = F.L = K.L.a.L = K.L^2.a$$

$L$ : ذراع هذه القوى ويمثل بعد مركز الرجل عن محور الدوران

كما سينتج لدينا عزوم ناتجة عن قوى العطالة:

$$M_2 = I.\ddot{\alpha}$$

ومنه فإن الشكل العام لمعادلة الحركة للنظام الموجود لدينا تكون:

$$m.\ddot{X} + K.X = F$$

$F$ : شعاع القوى الخارجية المؤثرة على الجملة.

$$F = [F_X \ F_Y \ F_Z \ M_X \ M_Y \ M_Z]^T$$

**T**: منقول شعاع القوى.

**K**: مصفوفة الصلابة ذات الشكل التالي:

$$K = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ 0 & 0 & 0 & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ 0 & 0 & 0 & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2 - 36)$$

**X**: شعاع الانتقالات الخطية والدورانية وتعطى بالشكل التالي:

$$X = [X \ Y \ Z \ \theta \ \varphi \ \gamma]^T$$

$$\ddot{X} = [\ddot{X} \ \ddot{Y} \ \ddot{Z} \ \ddot{\theta} \ \ddot{\varphi} \ \ddot{\gamma}]^T$$

**[I] = m**: مصفوفة الكتلة والعطالة وتعطى بالشكل التالي:

$$I = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_Y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_Z \end{bmatrix} \quad (2 - 37)$$

بناء على ما تقدم تكون مصفوفة الصلابة (36-2) بالشكل التالي:

$$C_{11}=K_X=29930.02 \text{ [N/m]}$$

$$C_{22}=K_Y=152.2 \text{ [N/m]}$$

$$C_{33}=K_Z=30082.22 \text{ [N/m]}$$

$$C_{44}=a_{11}$$

$$C_{55}=a_{22}$$

$$C_{66}=a_{33}$$

$$C_{45}=C_{54}=a_{12}=a_{21}$$

$$C_{46}=C_{64}=a_{13}=a_{31}$$

$$C_{56}=C_{65}=a_{23}=a_{32}$$

الآن يمكن كتابة مصفوفة الكتلة والعطالة بالشكل التالي:

$$m = I = \begin{bmatrix} 335.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 335.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 335.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.644 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 25.11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24.142 \end{bmatrix}$$

حيث  $m$ : [Kg]

$I$ : [Kg.m<sup>2</sup>]

بحساب عناصر مصفوفة الصلابة  $K$  سنحصل على القيم التالية:

الجدول (2-2) قيم عناصر مصفوفة الصلابة  $K$

$C_{66}$	$C_{55}$	$C_{44}$	$C_{33}$	$C_{22}$	$C_{11}$	ثابت الصلابة
80653.67	208836.55	44888.83	30082.22	152.2	29930.02	[N/m]
$C_{65}$	$C_{56}$	$C_{64}$	$C_{46}$	$C_{54}$	$C_{45}$	ثابت الصلابة
438.02	438.02	1253.531	1253.531	1379.82	1379.82	[N/m]

وبذلك تصبح مصفوفة الصلابة  $K$  بالشكل التالي:

$$K = \begin{bmatrix} 30082.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 29930.02 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 152.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 44888.8 & 1379.82 & 1253.53 \\ 0 & 0 & 0 & 1379.8 & 208836.55 & 438.02 \\ 0 & 0 & 0 & 1253.53 & 438.02 & 80653.6 \end{bmatrix}$$

### 5-الخلاصة:

قمنا في هذا البحث بإيجاد النموذج الرياضي اللازم لوصف نظام عمل محرك احتراق داخلي رباعي الأسطوانات، رباعي الأشواط، وذلك من خلال الأخذ بالاعتبار أن اهتزاز المحرك تسبب بدوران مسانده بزوايا أويلر الثلاث الأمر الذي خلق انتقالاً لكل مسند على المحاور الثلاثة، حيث تم إيجاد قيم هذه الانتقالات، ثم بجاء هذه الانتقالات بثوابت الصلابة حصلنا على قوة الإرجاع التي تسعى لإعادة المحرك الى وضع توازنه. خلقت قوى الإرجاع المستنتجة سابقاً عزوم دوران حول المحاور الإحداثية تم إيجادها من خلال جداء قوى الإرجاع بذراع هذه القوى ثم تم استنتاج النموذج الرياضي بشكله العام وحسب شكل الاهتزاز إن كان حراً أم قسرياً وقد تم عرض معادلة الحركة لهذا النظام في حالة الاهتزازات الحرة والقسرية واستنتاج جميع عناصر هذه المعادلة، علماً أن محرك الاحتراق الداخلي المدروس كان مرتبطاً أيضاً بعلبة السرعة ويمثلان جسماً صلباً واحداً ذا ست درجات حرية.

سيتم في بحث لاحق إثبات صحة النموذج الرياضي من خلال إجراء المقارنة بين قيم الترددات الحسابية والقيم التجريبية المستنتجة من إشارات الاهتزاز التي تم تسجيلها بواسطة لاقط الاهتزاز.

### المراجع العربية:

1- الشحادة، عبدو، وعد عمران، (2016). ديناميك الآلات والاهتزازات

الميكانيكية. منشورات جامعة دمشق.

2- الفارس، علي، (1989). الاهتزازات الميكانيكية. مطبوعات جامعة حلب.

3- النجار، رشدي، (1981). الاهتزازات الميكانيكية. مطبوعات جامعة حلب.

### المراجع الأجنبية:

- 4- Erkan Öztürk , Halit Karabulut. (2012). “Dynamic and vibration analysis of a single cylinder diesel engine”. Article in Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University · September.
- 5- Ezzeddine Ftoutou and Mnaouar Chouchane. (2018). “Injection Fault Detection of a Diesel Engine by Vibration Analysis”. Springer International Publishing AG.
- 6- Mahdi Ghasemi-Varnamkhasti, Seyed Saeid Mohtasebi, Masoud Zabolostani. (2009). “Investigation of internal combustion engine vibrations in order to reduce noise using a developed model”. Article · January.