

الإجهادات الرئيسية قيمةً واتجاهاً في الحالة الإجهادية الفراغية والمستوية

د. مصطفى طالب

كلية الهندسة الميكانيكية، جامعة إدلب

ملخص البحث:

تضمن هذا البحث دراسة تحليلية لتحديد الإجهادات الرئيسية، الناتجة عن تطبيق حمولة على جسم قيمةً واتجاهاً، وذلك بدلالة الإجهادات المؤثرة في عنصر أولي بأبعاد صغيرة جداً مقارنة بالأبعاد الخارجية للجسم المدروس وأكبر بكثير من الأبعاد الجزيئية لمادته، وتطبيق هذه الدراسة على جائز بمسندين بسيطين له مقطع عرضاني صندوقي الشكل، وحددت الإجهادات الناضمية والمماسية على امتداد المقطع العرضاني الأشد تحملاً للجائز وهو المقطع الموافق لموقع المسند البسيط الأيسر، وعن طريق هذه الإجهادات تم تحديد الإجهادان الرئيسان الأول والثاني، وزاويتا ميلهما عن المحور الإحداثي ox (المحور الطولاني للجائز)، وأنشئت دائرة مور للحالة الإجهادية لنقطة من الطرف السفلي للغطاء العلوي للجائز، وقورنت النتيجة مع القيمة المحددة تحليلياً، وكان تطابق تام بين النتيجتين، بعدها استعملت نظرية القص الأعظمي أو معيار تريسكا *Tresca Criterion* للمتانة فتبين توفر احتياطي متانة مريح بنسبة 14.3% حتى في النقاط الأكثر إجهاداً من المقطع العرضاني، وعليه من العنصر الإنشائي كلياً وهو ما يهدف إليه البحث أصلاً.

Principal Stresses in Terms of Value and Direction in Spatial and plain cases

Dr. Mustafa Taleb

Mechanical Engineering, Idleb University

Abstract

This research presents an analytical study to determine the principal stresses, both in terms of magnitude and direction, based on the normal and shear stresses acting on the faces of a stress cuboid formed around a point in a stressed body. The study is applied to a structural element in the form of a simply supported beam with a rectangular cross-section.

The normal and shear stresses are calculated along the most critical section of the beam, specifically at the section corresponding to the location of the left support. Using these stresses, the first and second principal stresses, along with their angle of inclination relative to the longitudinal axis of the beam, are determined. Mohr's circle is then constructed for the stress state at a point in the interior of the upper wall of the cross-section. The analytical and graphical results were found to be in exact agreement.

Furthermore, the maximum shear stress theory was employed to assess the strength of the beam. It was found that the beam has a safety margin of 14.3%, even at the most critical points in the cross-section. This result highlights the adequacy of the beam's strength, fulfilling the primary goal of the study.

1- المقدمة:

تعرف الإجهادات الرئيسية أنها الإجهادات الناعمية الخالصة، التي لا يرافقها إجهادات مماسية، وهي تؤثر في سطوح تسمى بالمستويات الرئيسية للإجهاد. ولتحديد الإجهادات الرئيسية يختار نقطة ما من الجسم المجهد، ويتخذ منها مبدأً لجملة إحداثيات ديكارتية xyz ، وينشأ حول هذه النقطة متوازي مستطيلات بأبعاد صغيرة جداً مقارنة مع الأبعاد الخارجية للعنصر الإنشائي، وكبيرة بما لا يقارن مع الأبعاد الجزيئية لمادة العنصر، وتحدد الإجهادات الناعمية والمماسية المؤثرة في كل من وجوه متوازي المستطيلات المذكور، ويسمى حينها متوازي مستطيلات الإجهاد، ثم يقطع متوازي مستطيلات الإجهاد هذا بمستوى مائل، وينشأ عن عملية القطع هذه موشور رباعي، جزءاً من متوازي مستطيلات الإجهاد، ويصنع الناظم للمستوي المائل هذا زوايا مختلفة مع المحاور الإحداثية.

يؤثر في الحالة العامة في هذا المستوي إجهاد كلي لا ينطبق على الناظم لهذا المستوي ويكون له مركبات باتجاه المحاور الإحداثية الثلاثة، تحدد هذه المركبات بدلالة الإجهادات المؤثرة في الوجوه الإنشائية لمتوازي مستطيلات الإجهاد، التي أصبحت الوجوه القائمة للموشور الرباعي، وبدلالة جيوب تمام الزوايا التي يصنعها الناظم مع المحاور الإحداثية، التي تسمى جيوب تمام الزوايا الموجهة، بعد ذلك يتمي بدور المستوي المائل حتى ينطبق الإجهاد الكلي على الناظم، وبذلك تختفي المركبة المماسية له وتبقى المركبة الناعمية، التي تبلغ مداها، حينها يأخذ الإجهاد الناعمي أعظم قيمة له و يسمى حينها إجهاداً رئيساً ويسمى المستوي المائل الذي يؤثر فيه بالمستوي الرئيس أيضاً.

وفي الحالة الفراغية للإجهاد ونتيجة لعملية تدوير المستوي المائل يتم الحصول على ثلاثة إجهادات رئيسة، بينما يحصل على إجهادين رئيسيين في الحالة المستوية للإجهاد. لقد تناول هذا الموضوع العديد من الباحثين، منهم العالم James H. Allen III، الذي حدد عام 2016 الإجهادات الرئيسية وزوايا ميلها على المحاور الإحداثية باستعمال دوائر مور [6]، وأوجد الباحث Jourge Luis Gonzalez-Velazquez الإجهادات الرئيسية وزوايا ميلها عن المحاور الإحداثية باستعمال طريقة مور [7]، كذلك حدد عام

2013 الباحث Dr. David Dye الإجهادات الرئيسية وزوايا ميلها على المحاور

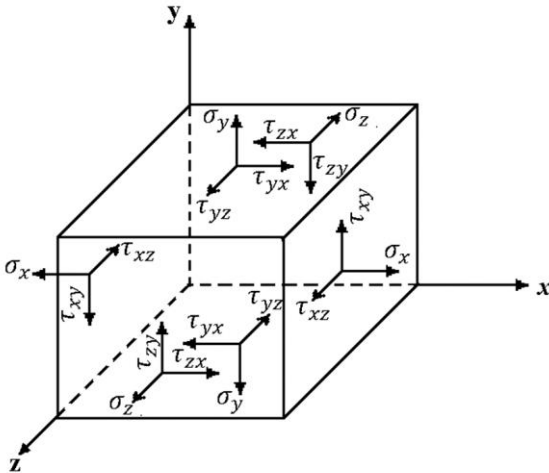
الإحداثية في الحالة الإجهادية المستوية 2D مستعملاً دائرة مور للإجهاد [8].

في هذا البحث أوجد توزع الإجهادات النازمية والمماسية على امتداد المقطع العرضاني الأكثر تحميلاً للعنصر الإنشائي وحدد توزع الإجهادات الرئيسية على امتداد المقطع العرضاني المذكور تحليلياً، وتخطيطياً كذلك باستعمال دوائر مور، ولأجل ذلك اشتقت علاقة الإجهاد النازمي والمماسي المؤثرين في سطح مائل بطريقة جديدة، وحسبت قيم هذين الإجهادين على مدار 360° وأنشئت دائرة مور بناء على نتائج الحساب، وقورنت القيم التخطيطية والتحليلية وكان التوافق تاماً.

2- أهمية البحث:

تأتي أهمية هذا البحث من أنه يتناول مسألة تحديد الإجهادات الرئيسية من حيث القيمة والاتجاه لعنصر إنشائي حقيقي بحمولات حقيقية، وذلك بغرض تقييم متانة هذا العنصر وتحديد احتياطي المتانة الذي يوفره استناداً للخواص الهندسية لمقطعه العرضاني والخواص الميكانيكية لمادته.

3- طريقة البحث:



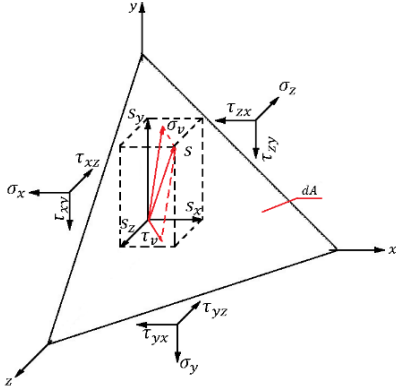
الشكل (1-3)

توصف الحالة الإجهادية حول نقطة ما من الجسم المجهد، الخاضع لمجموعة القوى، شكل

(1-3)، بما في ذلك ردود أفعال المساند، التي تشوه الجسم وتجهده داخلياً ولكنها تبقى عليه ساكناً دون حراك، عن طريق ما يسمى مصفوفة الإجهادات [1]، وهي مصفوفة من المرتبة 3×3 ، عناصر السطر الأول فيها عبارة عن الإجهادات المؤثرة على وجه متوازي مستطيلات الإجهاد المنشأ حول النقطة المذكورة، الذي ناظمه المحور x وعناصر السطر الثاني هي

الإجهادات المؤثرة على السطح الذي ناظمه المحور الإحداثي y ، فيما تمثل عناصر السطح الأخير الإجهادات المؤثرة على السطح الذي ناظمه المحور الإحداثي z ، والتي لها الشكل الآتي:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (1-3)$$



الشكل (2-3)

مع العلم أن: $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$ طبقاً لقانون تبادل الإجهادات المماسية.

لإيجاد الإجهادات الرئيسية، أي الإجهادات الناضمية التي لا تترافق مع إجهادات مماسية، التي تؤثر على سطح معينة داخل متوازي مستطيلات الإجهاد تسمى المستويات الرئيسية للإجهاد، نختار سطحاً ما مائلاً على المحاور الإحداثية الثلاثة xyz ، يصنع ناظمه v زوايا مختلفة α, β, γ مع المحاور

الإحداثية xyz ، وتسمى جيوب تمام الزوايا المذكورة جيوب التمام الموجهة للناظم v بالنسبة للمحاور الإحداثية المذكورة أي:

$$\cos(\alpha) = \cos(v, x) = l$$

$$\cos(\beta) = \cos(v, y) = m$$

$$\cos(\gamma) = \cos(v, z) = n$$

وترتبط جيوب التمام الموجهة فيما بينها بالعلاقة الآتية:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (2-3)$$

في الحالة العامة يؤثر في السطح المائل المذكور أعلاه، شكل (2-3)، إجهاد كلي S غير ناظمي على هذا السطح، وعليه يمكن تحليله إلى ثلاثة مركبات S_x, S_y, S_z باتجاه المحاور الإحداثية xyz تباعاً، وتحدد مركبات الإجهاد الكلي S على المحاور الإحداثية الثلاث عن طريق معادلات توازن القوى المؤثرة على وجوه الموشور الرباعي الناتج عن قطع متوازي مستطيلات الإجهاد المنشأ حول النقطة المدروسة من الجسم المجهد بالمستوي المائل المذكور، أي:

$$s_x \cdot dA = \sigma_x \cdot dA \cdot l + \tau_{xy} \cdot dA \cdot m + \tau_{xz} \cdot dA \cdot n$$

$$s_y \cdot dA = \tau_{yx} \cdot dA \cdot l + \sigma_y \cdot dA \cdot m + \tau_{yz} \cdot dA \cdot n$$

$$s_z \cdot dA = \tau_{zx} \cdot dA \cdot l + \tau_{zy} \cdot dA \cdot m + \sigma_z \cdot dA \cdot n$$

dA - هي مساحة السطح المائل.

أو:

$$s_x = \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} \cdot n$$

$$s_y = \tau_{yx} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{yz} \cdot n$$

$$s_z = \tau_{zx} \cdot l + \tau_{zy} \cdot m + \sigma_z \cdot n$$

ويعبر عن ذلك مصفوفياً كما يأتي:

$$\begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} \quad (3-3)$$

وبذلك يكون قد تم تحديد مركبات الإجهاد الكلي s باتجاه المحاور الإحداثية xyz تبعاً، بدلالة الإجهادات المؤثرة على السطوح الإنشائية لمتوازي مستطيلات الإجهاد وجيوب التمام الموجهة للناظم v على السطح المائل بالنسبة للمحاور الإحداثية xyz ، وإنه من خلال هذه المركبات يمكن إيجاد الإجهادين الناظمي σ_v ، والمماسي τ_v كما يأتي:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_v &= s_x \cdot l + s_y \cdot m + s_z \cdot n \\ \tau_v &= \sqrt{s^2 - \sigma_v^2} \end{aligned} \right\} \quad (4-3)$$

بتدوير السطح المائل تتغير جيوب التمام الموجهة للناظم، ويمكن عند دوران معين أن ينطبق الإجهاد الكلي s على الناظم للسطح المائل، أي ينطبق على الإجهاد الناظمي σ_v ويختفي عندها الإجهاد المماسي نهائياً، أي أنه يصبح:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sigma_v = s \\ \tau_v &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5-3)$$

$$\begin{aligned} s_x &= \sigma \cdot l \\ s_y &= \sigma \cdot m \\ s_z &= \sigma \cdot n \end{aligned} \quad \text{وتكون:}$$

وتأخذ الصيغة (3-3) الشكل المصفوفي الآتي:

$$\begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma l \\ \sigma m \\ \sigma n \end{pmatrix} \quad (6-3)$$

أو:

$$\begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \{0\} \quad (7-3)$$

لكن جيوب التمام الموجهة l, m, n لا يمكن لها أن تساوي الصفر جميعها في آن واحد طبقاً للعلاقة (2-3)، وعليه فإن:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = \{0\} \quad (8-3)$$

بنشر هذا المحدد نحصل على معادلة جبرية من الدرجة الثالثة بالنسبة لـ σ تسمى معادلة الإجهادات الرئيسية وهي من الشكل الآتي:

$$\sigma^3 + \Delta_1 \sigma^2 + \Delta_2 \sigma + \Delta_3 = 0 \quad (9-3)$$

علماً أن:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

بحل (9-3) نحصل على ثلاثة جذور تمثل قيم الإجهادات الرئيسية وتأتي وفق الترتيب التالي:
المعادلة

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

يؤثر الإجهاد الرئيس الأول σ_1 على مستوي ضمن متوازي مستطيلات الإجهاد يسمى بالمستوي الرئيس الأول لناظمه v_1 تجيبات موجة l_1, m_1, n_1 بالنسبة للمحاور الإحداثية xyz ، ويؤثر الإجهاد الرئيس الثاني σ_2 على مستوي آخر يسمى بالمستوي الرئيس الثاني لناظمه v_2 تجيبات موجة l_2, m_2, n_2 بالنسبة للمحاور الإحداثية xyz ، فيما يؤثر الإجهاد الرئيس الثالث σ_3 على الرئيس الثالث، الذي يمتلك ناظمه v_3 تجيبات موجة l_3, m_3, n_3 بالنسبة للمحاور الإحداثية المذكورة.

تحدد جيوب التمام الموجهة لنواظم المستويات الرئيسة الثلاث باستبدال σ في العلاقة (7-3) بـ σ_i علماً أن $i = 1 \dots 3$ أي:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_i & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_i & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_i \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} l_i \\ m_i \\ n_i \end{Bmatrix} = \{0\}$$

وبذلك نحصل على ثلاث معادلات جبرية من الشكل:

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_i)l_i + \tau_{xy}m_i + \tau_{xz}n_i &= 0 \\ \tau_{yx}l_i + (\sigma_y - \sigma_i)m_i + \tau_{yz}n_i &= 0 \\ \tau_{zx}l_i + \tau_{zy}m_i + (\sigma_z - \sigma_i)n_i &= 0 \end{aligned}$$

بالحل المشترك لهذه المعادلات نحصل على أشعة جيوب التمام الموجهة لنواظم المستويات الرئيسة الثلاث تباعاً:

$$\alpha_1 = \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{Bmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{Bmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{Bmatrix} l_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{Bmatrix}$$

وبذلك تكون قد حددت الإجهادات الرئيسة قيمةً واتجهاً في الحالة الإجهادية الفراغية بدلالة الإجهادات المؤثرة على وجوه متوازي مستطيلات الإجهاد المنشأ حول النقطة المدروسة من الجسم المجهد.

ويحدد الإجهادان الرئيسيان الأول والثاني قيمة واتجهاً في الحالة الإجهادية المستوية بنفس الطريقة، وذلك بأن الإجهادات المؤثرة على أحد وجوه متوازي مستطيلات الإجهاد معدومة، وليكن الوجه الذي ناظمه المحور الإحداثي z فتأخذ مصفوفة الإجهاد (1-3) الشكل الآتي:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وتأخذ مركبتا الإجهاد الكلي باتجاه المحورين الإحداثيين xy الشكل الآتي:

$$s_x = \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m$$

$$s_y = \tau_{yx} \cdot l + \sigma_y \cdot m$$

بتدوير السطح المائل حتى ينطبق الإجهاد الكلي على ناظم السطح المائل عندها تكون:

$$s_x = \sigma \cdot l$$

$$s_y = \sigma \cdot m$$

وعليه:

$$\begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} l \\ m \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (10-3)$$

أي:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\sigma^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\sigma + (\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2) = 0$$

بحل هذه المعادلة بطريقة الدلتا نجد أن:

$$\begin{aligned} \Delta &= (\sigma_x + \sigma_y)^2 - 4(\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2) = \\ &= \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\sigma_x\sigma_y - 4\sigma_x\sigma_y + 4\tau_{xy}^2 = \\ &= (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 \end{aligned}$$

ومنه:

$$\sigma_{1,2} = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

أو:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (11-3)$$

وبذلك يكون قد حددت قيمة الإجهادين الرئيسين بدلالة الإجهادات المؤثرة على متوازي مستطيلات الإجهاد في الحالة المستوية وهي: $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ، ولتحديد اتجاه المستويين الرئيسين الأول والثاني نستخدم إحدى الطريقتين التاليتين [3] :

1- من العلاقة (10-3) لدينا:

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{xy}m = 0 \\ \tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma)m = 0 \end{cases}$$

$$\frac{m}{l} = -\frac{\sigma_x - \sigma}{\tau_{xy}} = -\frac{\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma}$$

وباعتبار أن $l = \cos(\alpha)$; $m = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$ إذ إن $(\alpha < \pi/2)$ هي زاوية ناظم السطح المائل عن المحور x يكون:

$$tg(\alpha) = \frac{m}{l} = \frac{\sigma - \sigma_x}{\tau_{xy}} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma - \sigma_y}$$

ومن أجل $\sigma = \sigma_1$ يكون:

$$tg(\alpha_1) = \frac{m_1}{l_1} = \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_1 - \sigma_y}$$

ومن أجل $\sigma = \sigma_2$ يكون:

$$tg(\alpha_2) = \frac{m_2}{l_2} = \frac{\sigma_2 - \sigma_x}{\tau_{xy}} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_2 - \sigma_y}$$

بالتعويض عن σ_1, σ_2 بما يساويانه في العلاقتين (11-3) نجد أن:

$$\tan(\alpha_{1,2}) = \frac{1 \mp \sqrt{1 + \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_x}\right)^2}}{\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_x}\right)}$$

ومنه:

$$\alpha_{1,2} = \tan^{-1} \left(\frac{1 \mp \sqrt{1 + \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_x}\right)^2}}{\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_x}\right)} \right) \quad (12-3)$$

إذ إن: α_1 هي زاوية ميل ناظم المستوي الرئيس الأول عن المحور x ، و α_2 هي زاوية ميل ناظم المستوي الرئيس الثاني عن المحور المذكور.

2- وتتلخص في البحث عن مستو مائل ضمن متوازي مستطيلات الإجهاد يكون الإجهاد المماسي غائباً فيه، أي أنه مستو رئيس للإجهاد [2]. بفرض أن ناظم هذا المستوي يميل بزاوية α عن المحور الإحداثي x ، بالعودة للعلاقة (3-4) نجد أن:

$$\tau_\alpha = \sqrt{s^2 - \sigma_\alpha^2} = 0$$

علماً أن:

$$\begin{aligned} s^2 &= s_x^2 + s_y^2 = (\sigma_x l + \tau_{xy} m)^2 + (\tau_{yx} l + \sigma_y m)^2; \\ \sigma_\alpha &= s_x l + s_y m = (\sigma_x l + \tau_{xy} m)l + (\tau_{yx} l + \sigma_y m)m; \\ l &= \cos(\alpha), m = \sin(\alpha). \end{aligned}$$

ومنه فإن:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + 2\tau_{yx} lm = \\ &= \sigma_x \cos(\alpha)^2 + \sigma_y \sin(\alpha)^2 + 2\tau_{yx} \sin(\alpha) \cos(\alpha) \\ \Rightarrow \sigma_\alpha &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\alpha) + \tau_{yx} \sin(2\alpha) \end{aligned} \quad (13-3)$$

وهو الإجهاد الناطمي على السطح، الذي يميل ناظمه بزاوية α عن المحور الإحداثي x .

أما الإجهاد المماسي المؤثر في هذا السطح فهو:

$$\begin{aligned}
 \tau_{\alpha}^2 &= s^2 + \sigma_{\alpha}^2 = s_x^2 + s_y^2 - (s_x l + s_y m)^2 = \\
 &= s_x^2 + s_y^2 - (s_x^2 l^2 + s_y^2 m^2 + 2s_x s_y l m) \\
 &= s_x^2 (1 - l^2) + s_y^2 (1 - m^2) - 2s_x s_y l m
 \end{aligned}$$

وإذ إنه والحالة هذه $l^2 + m^2 = 1$ ، فإن $1 - l^2 = m^2$ و $1 - m^2 = l^2$ وعليه

إن:

$$\begin{aligned}
 \tau_{\alpha}^2 &= s_x^2 m^2 + s_y^2 l^2 - 2s_x s_y l m = \\
 &= (\sigma_x l + \tau_{xy} m)^2 m^2 + (\tau_{yx} l + \sigma_y m)^2 l^2 - 2(\sigma_x l + \tau_{xy} m)(\tau_{yx} l + \sigma_y m) l m = \\
 &= \sigma_x^2 l^2 m^2 + \tau_{xy}^2 m^4 + 2\sigma_x \tau_{xy} l m^3 + \sigma_y^2 l^2 m^2 + \tau_{xy}^2 l^4 + 2\sigma_y \tau_{xy} l^3 m - \\
 &\quad - 2(\sigma_x \tau_{xy} l^2 + \sigma_x \sigma_y l m + \tau_{xy}^2 l m + \sigma_y \tau_{xy} m^2) l m = \\
 &= (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\sigma_x \sigma_y) l^2 m^2 + \tau_{xy}^2 (l^4 + m^4 - 2l^2 m^2) + \\
 &\quad + 2\tau_{xy} [\sigma_x (m^2 - l^2) + \sigma_y (l^2 - m^2)] l m = \\
 &= (\sigma_x - \sigma_y)^2 l^2 m^2 + \tau_{xy}^2 (l^2 - m^2)^2 + 2\tau_{xy} [\sigma_x (m^2 - l^2) + \sigma_y (l^2 - m^2)] l m.
 \end{aligned}$$

وبما أن:

$$\begin{aligned}
 l^2 &= \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \\
 m^2 &= \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}
 \end{aligned}$$

فإن:

$$\begin{aligned}
 l^2 - m^2 &= \cos 2\alpha, \quad m^2 - l^2 = -\cos 2\alpha, \\
 l^2 m^2 &= \left(\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \right) \left(\frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \right) = \frac{1 - \cos^2 2\alpha}{4}, \\
 l m &= \sqrt{\frac{\sin^2 2\alpha}{4}} = \frac{\sin 2\alpha}{2}.
 \end{aligned}$$

ومنه فإن:

$$\begin{aligned}
 \tau_{\alpha}^2 &= \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 \sin^2 2\alpha + \tau_{xy}^2 \cos^2 2\alpha - 2\tau_{xy} \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \sin 2\alpha \cos 2\alpha = \\
 &= \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau_{xy} \cos 2\alpha \right)^2 \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau_{xy} \cos 2\alpha \quad (14-3)$$

وكي يكون المستوي المدروس رئيساً يلزم أن يكون τ_{α} معدوماً أي:

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau_{xy} \cos 2\alpha = 0$$

ومنه فإن:

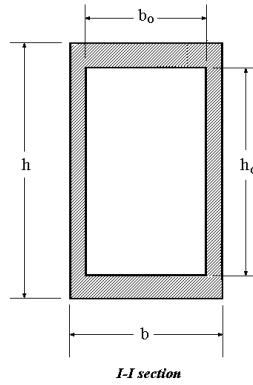
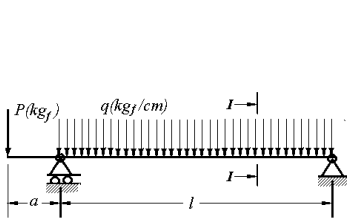
$$\tan 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

وعليه فالزاوية التي يميل بها ناظم المستوي الرئيسي الأول عن المحور x هي:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) \quad (15-3)$$

تستنتج زواوية ميل المستوي الرئيس الثاني عن المحور x هي: $\alpha_2 = \alpha \pm \frac{\pi}{2}$ ، وبذلك نكون قد حددنا اتجاه المستويين الرئيسين مرة أخرى.

4- موضوع البحث:



سنتناول بالدراسة والحساب
جائزاً بسيطاً مع نهاية حرة
شكل (4-1) المقابل،
بمقطع عرضاني على شكل
صندوق بالمعطيات المبينة
بالجدول الآتي [5]:

الشكل (4-1)

الجدول (4-1)

q ($\frac{KN}{m}$)	P (KN)	L (m)	a (m)	σ (Mpa)	τ (Mpa)	h (cm)	h_0 (cm)	b (cm)	b_0 (cm)
29.42	39.2	4	0.8	156.9	98.07	16	12	8	6

لتحديد الحالة الإجهادية حول نقطة ما من الجسم المجهد (الجائز في هذه الحالة) ندرس توزيع الإجهادات الناعمية والمماسية على امتداد مقطعه العرضاني الأشد تحميلاً، ويحدد المقطع الأخطر من حيث التحميل بناء على مخطط عزم الانعطاف والجهد القاطع، وتحدد الإجهادات الرئيسية قيمة واتجاهاً، وتستعمل إحدى نظريات المتانة للحكم على مدى متانة الجسم المدروس وفق التسلسل الآتي:

1-4- مخطط الجهد القاطع وعزم الانعطاف على طول الجائز:

لإيجاد مخطط الجهد القاطع وعزم الانعطاف على طول الجائز، نحدد بداية ردود أفعال

المساند، من معادلة توازن العزوم حول المسند B لدينا: $\sum M_B = 0 \Rightarrow$

$$R_A L = P(a + L) + \frac{qL^2}{2} \Rightarrow$$

$$R_A = \frac{P(a + L) + \frac{qL^2}{2}}{L} = 105.916 \text{ kN}$$

من معادلة توازن العزوم حول المسند A لدينا:

$$R_B L - \frac{qL^2}{2} + Pa \Rightarrow$$

$$R_B = \frac{Pa - \frac{qL^2}{2}}{L} = -50.996 \text{ kN}$$

لصيغة معادلة توزيع الجهد القاطع $Q(x)$ وعزم الانعطاف $M_b(x)$ على طول الجائز، نقسم الجائز إلى مجالين، إذ يحدث تغير في الحملات، فالمجال الأول تتراوح فيه قيمة x ضمن المجال $0 \leq x_1 \leq a$ ، والمجال الثاني تتراوح فيه قيمة x ضمن المجال $a \leq x_2 \leq a + L$.

في المجال الأول:

$$Q(x_1) = -P = -39.227 \text{ kN} \quad (1-4)$$

$$M_b(x_1) = -Px_1$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow M_b(x_1) = 0 \quad (2-4)$$

$$x_1 = a \Rightarrow M_b(x_1) = -Pa = -31.382 \text{ kN.m}$$

في المجال الثاني:

$$\begin{aligned} Q(x_2) &= -P + R_A - q(x_2 - a) \\ x_2 = a &\Rightarrow Q(x_2) = -P + R_A = 66.688 \text{ kN} \\ x_2 = a + L &\Rightarrow Q(x_2) = -P + R_A - q(x_2 - a) = -50.996 \text{ kN} \end{aligned} \quad (3-4)$$

وينعدم الجهد القاطع عند المقطع العرضاني الذي يبعد المسافة التالية عن الطرف الحر من الجائز:

$$x_2 = \frac{R_A - P + qa}{q} = 3.066 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} M_b(x_2) &= -Px_2 + R_A(x_2 - a) - \frac{q}{2}(x_2 - a)^2 \\ x_2 = a &\Rightarrow M_b(x_2) = -Pa = -31.382 \text{ kN.m} \\ x_2 = a + L &\Rightarrow M_b(x_2) = -P(a + L) + R_AL - \frac{q}{2}L^2 = 0 \end{aligned} \quad (4-4)$$

وينعدم عزم الانعطاف عند المقطع العرضاني الذي يبعد المسافة الآتية عن الطرف الحر من الجائز:

$$\begin{aligned} M_b(x_2) &= -Px_2 + R_A(x_2 - a) - \frac{q}{2}(x_2 - a)^2 = 0 \Rightarrow \\ x_2^2 - 2\left(\frac{aq + R_A - P}{q}\right)x_2 + \frac{aq^2 + 2aR_A}{q} &= 0 \Rightarrow \\ x_2 &= \frac{-9.2 \mp 5.2}{-3} = \begin{cases} 4.8 \\ 1.33 \end{cases} \text{ m} \end{aligned}$$

ويأخذ عزم الانعطاف أعظم قيمة له عند المقطع العرضاني الذي يبعد المسافة الآتية عن الطرف الحر من الجائز:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_2} \left[-Px_2 + R_A(x_2 - a) - \frac{q}{2}(x_2 - a)^2 \right] &= 0 \Rightarrow \\ -qx_2 + (R_A - P + aq) &= 0 \Rightarrow \\ x_2 &= \frac{(R_A - P + aq)}{q} = 3.066(m) \end{aligned}$$

وهي النقطة ذاتها التي ينعدم عندها الجهد القاطع.

وتبلغ قيمة عزم الانعطاف عند هذه النقطة القيمة الآتية:

$$M_b(3.066) = -Px_2 + R_A(x_2 - a) - \frac{q}{2}(x_2 - a)^2 = 44.197 \text{ kN.m}$$

على الشكل (3-b,c) يظهر مخطط توزع الجهد القاص وعزم الانعطاف والقيم المميزة لهما. بالتدقيق في هذين المخططين يلاحظ أن المقطع العرضاني الواقع مباشرة فوق المسند A هو الأشد حملاً من بين مقاطع الجائز كافة، فهو يتعرض لجهد قاطع قدره $Q = 105.91 \text{ kN}$ وعزم انعطاف $M_b = 31.382 \text{ kN.m}$ ، وعليه سنتركز الدراسة.

2-4- دراسة توزع الإجهاد الناطمي على امتداد المقطع العرضاني [1] : نظراً لكون الانعطاف بسيطاً، فإن الإجهاد الناطمي يتوزع وفق العلاقة الآتية على امتداد المقطع العرضاني:

$$\sigma(y) = \frac{M_b}{W_z} = \frac{M_b}{I_z} y$$

إذ إن: $I_z (cm^4)$ - هو عزم عطالة المقطع العرضاني حول المحور Z وهو يساوي في حالتنا

$$I_z = \frac{1}{12} (bh^3 - b_0 h_0^3) = \frac{5600}{3} \text{ cm}^4$$

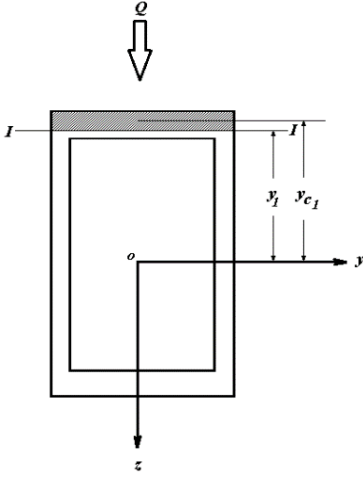
$$W_z = \frac{I_z}{y} \text{ cm}^3 - \text{هو عزم مقاومة المقطع العرضاني للانعطاف.}$$

وعليه فإن الإجهاد الناطمي يتوزع بشكل خطي تابعاً لارتفاع النقطة المدروسة عن المحور الإحداثي المركزي Z وفق العلاقة الآتية:

$$\sigma(y) = \frac{M_b}{I_z} y = \frac{3 \times 320 \times 10^3}{5600} y = 171.4 y \quad (5-4)$$

دراسة توزيع الإجهاد المماسي على امتداد المقطع

العرضاني:



ونبدأ بالجدار العلوي، ولأجل ذلك نختار مقطعاً طولانياً I-I

I ، واقعاً على مسافة y_1 من المحور Z، كما هو مبينبالشكل المقابل، حيث أن: $\frac{h}{2} \leq y_1 \leq \frac{h_0}{2}$

يعطى الإجهاد المماسي حسب صيغة جورافسكي نتيجة

لتأثير الجهد القاطع Q المؤثر باتجاه المحور y كما يأتي

:[4]

$$\tau_{xy} = \frac{Q \cdot s_z^*}{b I_z}$$

الشكل (4-2)

إذ إن: $Q [KN]$ - الجهد القاص $s_z^* [cm^3]$ - عزم مساحة الجزء الواقع فوق المقطع I-I من المقطع العرضاني $b [cm]$ - عرض المقطع العرضاني عند المقطع المذكور $I_z [cm^4]$ - عزم عطالة المقطع العرضاني للجائز حول المحور z

دراسة توزيع الإجهاد المماسي في الجدار العلوي من المقطع العرضاني: استناداً إلى

الشكل (4-2) نجد أن:

$$s_z^* = A^* \cdot y_{c1} = b \left(\frac{h}{2} - y_1 \right) \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y_1 \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) \Rightarrow$$

$$\tau_{xy} = \frac{Q \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right)}{b I_z} = \frac{Q \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right)}{b \frac{1}{12} (b h^3 - b_0 h_0^3)} \quad (6-4)$$

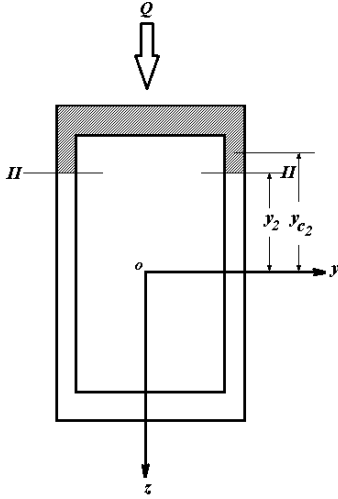
وهي معادلة توزيع الإجهاد المماسي في الجدارين العلوي والسفلي من المقطع العرضاني.

وإنه من أجل:

$$y_1 = \frac{h}{2} \Rightarrow \tau_{xy} = 0$$

$$y_1 = \frac{h_0}{2} \Rightarrow \tau_{xy} = 7.946 \text{ MPa}$$

وهي قيمة الإجهاد المماسي عند الطرف السفلي من الجدار العلوي.



دراسة توزيع الإجهاد المماسي في الجدارين

الجانبين من المقطع العرضي [1]: لأجل ذلك نختار

مقطعاً طولانياً II-II يقع على مسافة y_2 من المحور z ،

إذ إن: $0 \leq y_2 \leq \frac{h_0}{2}$ ، كما هو مبين بالشكل (4-3) المبين جانباً، هنا يكون:

$$s_z^* = A_1^* \cdot y_{c1} + A_2^* \cdot y_{c2}$$

علماً أن :

$$A_1^* = b \left(\frac{h}{2} - \frac{h_0}{2} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y_1 \right)$$

$$y_{c1} = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + \frac{h_0}{2} \right)$$

$$A_1^* \cdot y_{c1} = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_0^2}{4} \right) = \frac{b}{8} (h^2 - h_0^2)$$

$$A_2^* = (b - b_0) \left(\frac{h_0}{2} - y_2 \right)$$

$$y_{c2} = \frac{1}{2} \left(\frac{h_0}{2} + y_2 \right)$$

$$s_z^* = \frac{b}{8} (h^2 - h_0^2) + \frac{(b - b_0)}{2} \left(\frac{h_0^2}{4} - y_2^2 \right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{Q s_z^*}{(b - b_0) I_z} = \frac{Q}{8 I_z} \left[\frac{b(h^2 - h_0^2)}{(b - b_0)} + \frac{1}{2} (h_0^2 - 4y_2^2) \right] \quad (7-4)$$

وهي معادلة توزيع الإجهاد المماسي في الجدارين الجانبين من المقطع العرضي.

ومن أجل:

$$y_2 = \frac{h_0}{2} \Rightarrow \tau_{xy} = \frac{Q}{8I_z} \frac{b(h^2 - h_0^2)}{(b - b_0)}$$

$$y_2 = 0 \Rightarrow \tau_{xy} = \frac{Q}{8I_z} \left[\frac{b(h^2 - h_0^2)}{(b - b_0)} + \frac{h_0^2}{8} \right]$$

5- الحسابات والنتائج:

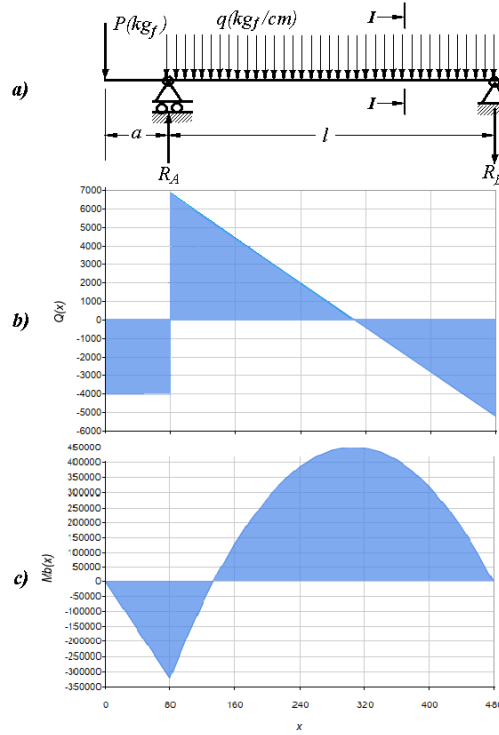
- حساب قيم الجهد القاطع باستعمال العلاقتين (1-4) و (3-4) وعزم الانعطاف باستعمال العلاقتين (2-4) و (4-4) على امتداد الجائز، بدءاً من النهاية الحرة للجائز بفاصل 20(cm).

الجدول (5-1) قيم الجهد القاطع وعزم الانعطاف على امتداد الجائز

x(cm)	Q(KN)	M _b (KN. cm)
0	-39.228	0
20	-39.228	-784.56
40	-39.228	-1569.12
60	-39.228	-2353.68
80	-39.228* 66.687	-3138.24
100	66.687	-1863.33
120	54.919	-706.104
140	49.035	333.438
160	43.151	1255.296
180	37.266	2059.470
200	31.382	2745.960
220	25.498	3314.766
240	19.614	3765.888
260	13.726	4099.326
280	7.845	4315.080
300	1.961	4413.150
320	-3.922	4393.536
340	-9.807	4256.238
360	-15.691	4001.256
380	-21.575	3628.590
400	-27.459	3138.240
420	-33.343	2530.206
440	-39.228	1804.488

460	-45.112	961..086
480	-50.996	0

القيمة المشار إليها بنجمة * تعود إلى اعتبار النقطة المعنية هي جزء من الغطاء العلوي للمقطع العرضاني وليست من الجدارين الجانبيين.

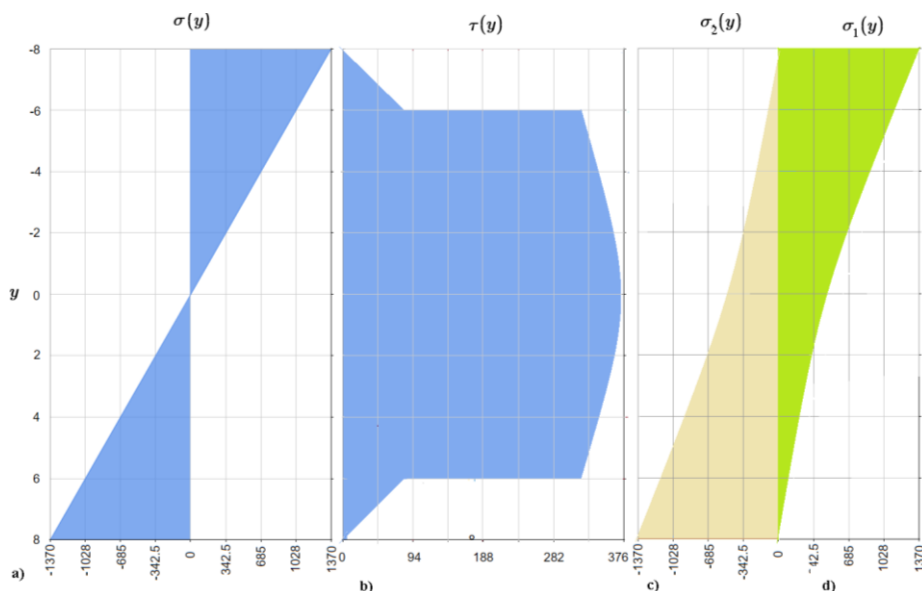


الشكل (5-1) :

a - المخطط الحسابي للعنصر الإنشائي موضوع الدراسة، b - مخطط توزيع الجهد القاطع ،
c - مخطط عزم الانعطاف.

- حساب قيم الإجهادين النازمي $\sigma_x(y)$ باستعمال العلاقة (5-4) والمماسي $\tau_{xy}(y)$ باستعمال العلاقتين (5-4) و(6-4)، والإجهادين الرئيسين $\sigma_1(y)$ و $\sigma_2(y)$ باستعمال العلاقتين (11-3)، وزاويتي ميل ناظم المستوي الرئيس الأول α_1 والثاني

α_2 باستعمال العلاقات (3-12) و(3-15) ، على امتداد المقطع العرضي للجائز ، وبفاصل 2(cm) بدءاً من الطرف العلوي للمقطع العرضي



- الشكل (5-2): a - مخطط توزيع الإجهاد الناطمي $\sigma_x(y)$ ، b - مخطط توزيع الإجهاد المماسي $\tau_{xy}(y)$ ، c - مخطط توزيع الإجهاد الرئيس الثاني $\sigma_2(y)$ ، d - مخطط توزيع الإجهاد الرئيس الأول $\sigma_1(y)$ ، وذلك على امتداد ارتفاع المقطع العرضي للجائز.

الجدول (5-2): يتضمن قيم الإجهادين الناطمي $\sigma_x(y)$ والمماسي $\tau_{xy}(y)$ ، والإجهادين الرئيس الأول $\sigma_1(y)$ والثاني $\sigma_2(y)$ ، وزاويتي ميل ناظم المستوي الرئيسي الأول α_1 والثاني α_2 .

y (cm)	$\sigma_x(y)$ (MPa)	$\tau_{xy}(y)$ (MPa)	$\sigma_1(y)$ (MPa)	$\sigma_2(y)$ (MPa)	α_1 (°)	α_2 (°)
-8	134.49	0	134.495	0	0	-90
-6	100.94	7.946* 31.784	110.166	-9.174	16.1	-73.9
-4	67.268	34.622	81.904	-14.635	22.915	-67.09
-2	33.634	36.325	56.864	-23.211	32.579	-57.42
0	0	36.892	36.892	-36.892	45	-45
2	-33.634	36.325	23.211	-56.846	-32.579	57.421
4	-67.268	34.622	14.635	-81.904	-22.915	67.085

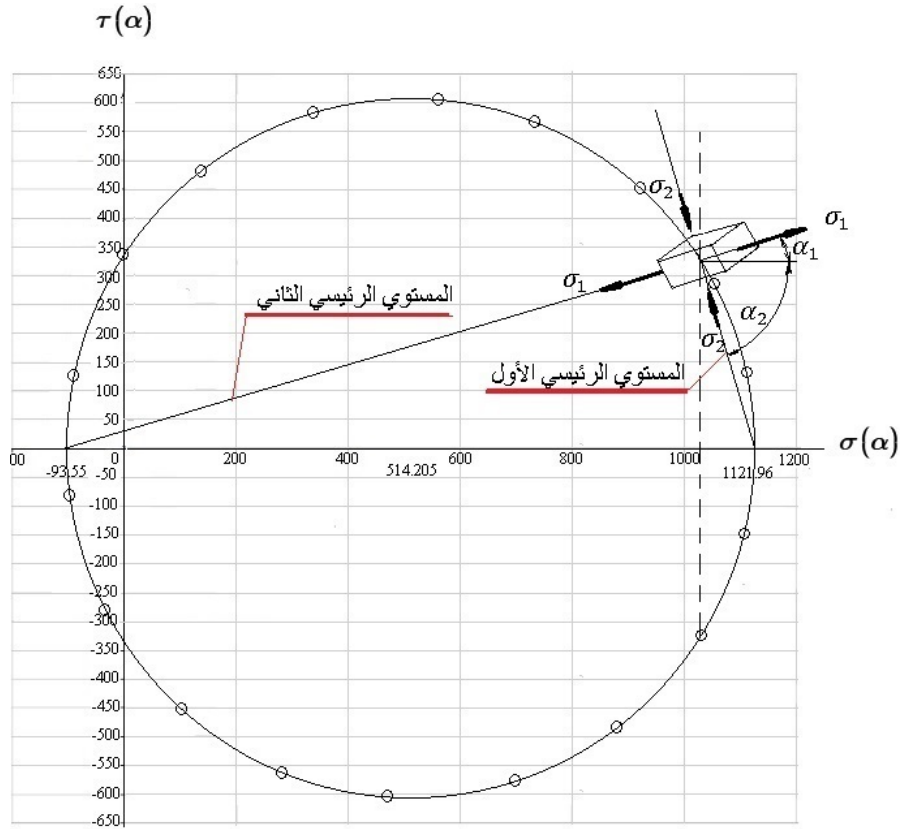
6	-100.94	7.946* 31.784	9.174	-110.166	-16.1	73.9
8	-134.495	0	0	-134.495	0	90

الجدول (3-5): يتضمن قيم الإجهادين الناطمي σ_α حسب العلاقة (3-13)

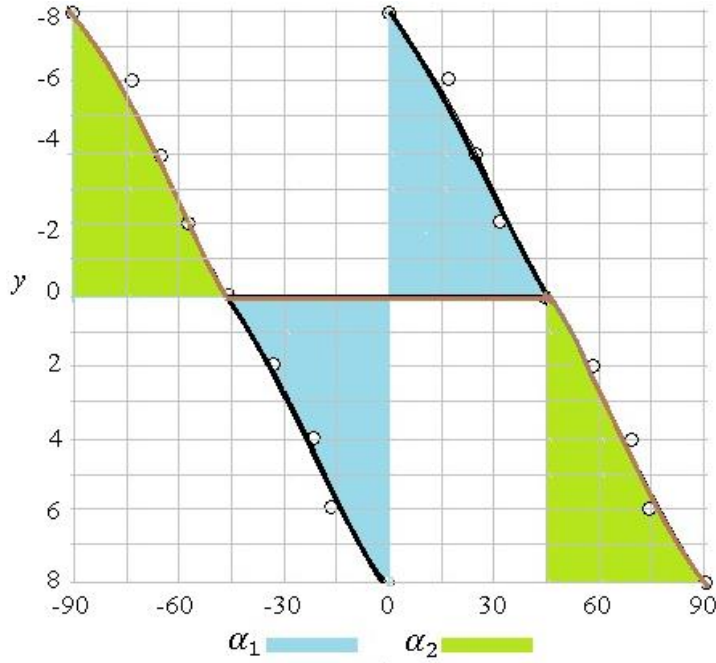
والمماسي τ_α حسب العلاقة (3-14) تبعا لتغير زاوية ميل ناظم المستوى الرئيس الأول

α على مدار 360° .

$\alpha(^{\circ})$	$2\alpha(^{\circ})$	$\sigma_\alpha(\text{MPa})$	$\tau_\alpha(\text{MPa})$	$\alpha(^{\circ})$	$2\alpha(^{\circ})$	$\sigma_\alpha(\text{MPa})$	$\tau_\alpha(\text{MPa})$
0	0	100.886	-31.783				
10	20	108.714	-12.613	190	380	108.714	-12.613
20	40	109.513	8.076	200	400	109.513	8.076
30	60	103.189	27.793	210	420	103.103	27.793
40	80	90.502	44.157	220	440	90.502	44.157
50	100	72.983	55.194	230	460	72.983	55.194
60	120	52.746	59.577	240	480	52.746	59.577
70	140	32.230	56.771	250	500	32.230	56.771
80	160	141.82	47.118	260	520	13.912	47.118
90	180	0	31.685	270	540	0	31.685
100	200	-7.828	12.613	280	560	-7.828	12.613
110	220	-8.627	-8.076	290	580	-8.627	-8.076
120	240	-2.303	-27.792	300	600	-2.303	-27.792
130	260	10.383	-44.156	310	620	10.382	-44.156
140	280	27.901	-55.195	320	640	27.901	-55.195
150	300	48.138	-59.576	330	660	48.138	-59.576
160	320	68.654	-56.771	340	680	68.654	-56.771
170	340	86.777	-47.119	350	700	86.973	-47.119
180	360	100.886	-31.613	360	720	100.395	-31.783



الشكل (3-5): دائرة مور للحالة الإجهادية عند الحافة السفلى من الطرف العلوي للمقطع العرضاني منشأة حسب قيم σ_α و τ_α الواردين في الجدول (3-5) أعلاه.



الشكل (4-5): تغير زاويتي ميل ناظم المستويين الرئيسيين α_1 و α_2 على امتداد نقاط المقطع العرضاني.

- تقييم متانة العنصر الإنشائي: طبقاً لنظرية إجهاد القص الأعظمي *maximum shear stress theory* ووفقاً لمعيار تريسكا Tresca Criterion [4] ، فإن إجهاد القص الأعظمي في حالة الإجهاد الفراغية يجب ألا يزيد عن إجهاد القص المسوح به أي:

$$\tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leq [\tau] = 0.5[\sigma]$$

وفي الحالة حالتنا إذ الحالة الإجهادية مستوية أي أن σ_3 غير موجود أصلاً فإن هذه العلاقة تأخذ الشكل الآتي:

$$\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \leq [\tau] = 0.5[\sigma] \Rightarrow \sigma_1 - \sigma_2 \leq [\sigma]$$

وبالتالي فإن الفرق بين الإجهادين الرئيسيين في أية نقطة من نقاط العنصر الإنشائي يجب أن يكون أصغر من إجهاد الشد المسموح به.

الجدول (4-5) يتضمن قيم الفارق $\sigma_1 - \sigma_2$ والنسبة $\frac{[\sigma] - (\sigma_1 - \sigma_2)}{[\sigma]}$ لنقاط المقطع العرضاني.

y (cm)	$\sigma_1 - \sigma_2$ (MPa)	$\frac{[\sigma] - (\sigma_1 - \sigma_2)}{[\sigma]}$
-8	134.495	0.143
-6	123.704	0.24
-4	96.539	0.385
-2	80.059	0.49
0	74.079	0.53
2	80.058	0.49
4	96.539	0.385
6	123.704	0.24
8	134.495	0.143

6- مناقشة النتائج:

- 1- يتغير الإجهادان الرئيسان σ_1 و σ_2 عكسياً من قيمة عظمى عند الطرف العلوي من الجائز إلى قيمة دنيا عند طرفه السفلي.
- 2- تعطي العلاقتان (12-3) المستنتجتان في سياق هذا البحث، قيمة زاويتي ميل ناظم المستوي الرئيس الأول والثاني بالنسبة للمحور الإحداثي x مباشرة، مقارنة بالعلاقة (15-3)، التي تتطلب خطوتين من أجل ذلك.
- 3- تتزايد زاوية ميل ناظم المستوي الرئيس الأول نحو الأعلى، بالنسبة للمحور الإحداثي x ، من الصفر عند الطرف العلوي من المقطع العرضاني حتى 45° عند الخط المتوسط له، ثم تنعكس زاوية الميل نحو الأسفل من 45° عند الخط المتوسط حتى الصفر عند الطرف السفلي، بينما تتغير زاوية ميل المستوي ناظم الرئيس الثاني من قيمة دنيا عند الطرف العلوي

إلى قيمة عظمى عند الطرف السفلى، وتحافظ قيمهما على فارق ثابت قدره 90° .

4- بالتدقيق في دائرة مور المنشأة خصيصاً للحالة الإجهادية في النقطة الواقعة على الحافة السفلية من الغطاء العلوي للمقطع العرضاني، يلاحظ التطابق بين قيم σ_1 ، σ_2 و α_1 ، α_2 الحسابية والتخطيطية.

5- بينت نتائج الحساب تحقق شرط المتانة $[\sigma] \geq \sigma_1 - \sigma_2$ في نقاط المقطع العرضاني كافة مع توفر احتياطي متانة مريح قدره $\frac{[\sigma] - (\sigma_1 - \sigma_2)}{[\sigma]}$ 14.3% في النقطتين الأكثر إجهاداً (عند الحافتين العلوية والسفلية للمقطع العرضاني) ويصل إلى 53% عند محور الجائز.

المراجع العلمية:

العربية:

- 1 - د. عبد العليم الديب، مقاومة المواد (1)، منشورات جامعة حلب، كلية الهندسة المدنية 2015، ص 32-40.
- 2 - د. محمد نظمي زرنني، مقاومة المواد، منشورات جامعة حلب، كلية الهندسة الميكانيكية 1997، ص 9.
- 3 - د. غسان سلوم، مقاومة المواد (1)، منشورات جامعة حلب، كلية الهندسة المدنية 1982، ص 37.

الأجنبية:

- 4 – пособие к решению задач по сопротивлению материалов, И.Н. Миролюбов и другие, издательство (Высшая школа) Москва, 1977 стр. 150.
- 5 – DIN- 17100 – 1980, Mechanical and technological properties the as-delivered condition and/or condition of the steel in of treatment according to section 8.4.1.
- 6 – James H. Allen III 2016: Using Mohr's Circle to Find Principal Stresses and Angels.
- 7– [Structural Integrity No.12] Jourge Luis Gozalez- Velazquez- Mechanical Behavior and Fracture of Engineering Materials (2020, Springer) [10.1007-978-3-030-29241-6]-libgen.li.pdf.
- 8 – David Dye(2013), pp. 12-18; MSE: Mechanical Behavior , Continuum Mechanics(Stress Tensors), (<http://learn.imperial.ac.uk>) and at <http://dyedavid.Com/mse203>.