خوارزميات فعالة لحساب عناصر عمود ومجموعها من الأعداد الزوجية أو الفردية المرتبة مبتدئين من العدد 2 أو 1.

أ.د. أحمد هلال الكردي

كلية الهندسة المعلوماتية – جامعة إدلب–إدلب

بريد الالكتروني:

dr.ahmadkurdi@gmail.com

الملخص

في هذه المقالة، واعتمادا على **(Abo Al Ward, 2011)**، نرتب الأعداد الزوجية (أو الفردية) مبتدئين من العدد **2** (أو **1**) و ننتهي بأي عدد زوجي (أو فردي) على شكل مصفوفات مربعة من المرتبة $n \geq 2$. نقترح خوارزميات فعالة تعقيدها $O(n)$ لحساب عناصر أي عمود و مجموع عناصره بإيجاد صيغ رياضية على شكل خوارزميات توضح كيفية حساب عناصر أي عمود و مجموع عناصره. علاوة على ذلك، يمكن حساب مجموع عناصر أي عمود آخر من أعمدة المصفوفات المنظمة بمعرفة مجموع عناصر أحد الأعمدة الأخرى. ننفذ جميع الخوارزميات المقترحة باستخدام لغة **(Attaway, 2009, P. 343) Matalb13a** على حاسوب **PC 4Pentium 2394 MHz with RAM 8.00 Gb.** الصيغ الرياضية الناتجة مهمة جدا وبسيطة ويسهل تنفيذها بأية لغة برمجة.

كلمات المفتاح: خوارزمية، عدد زوجي، عدد فردي، مجموع عناصر عمود، عناصر عمود.

Efficient Algorithms for finding Elements of Column and its Summation from the Arranged Even or Odd numbers starting from the number 2 or 1

Prof. Dr. Ahmad H. Al Kurdi

Faculty of Informatics Engineering Faculty –
University of Idleb - Idleb
E-mail: dr.ahmadkurdi@gmail.com

ABSTRACT

In this paper, and depending on [**1**], if we arrange the even (or odd numbers) starting from the number **2** (or **1**) and finishing by any even (or odd number) on the form of square matrices of order $n \geq 2$. we suggest some efficient algorithms of complexity $O(n)$ to compute elements of any column and summation of its elements by finding mathematical formulas in the form of algorithms that do exhibition how to computing the elements of any column and summation of its elements. However, we can compute elements summation of any column by knowing elements summation of a column. We carry out these the suggested algorithms using Matlab**13**a[**2**] on PC **4Pentium 2394 MHz with RAM 8.00 Gb**. The resulting formulas are very important and very simple to be carried out on PC programming languages.

Key words: Algorithm, Odd Number, Even Number , Sum of Elements of Column, Elements of Column.

1. مقدمة.

أتت فكرة هذه المقالة بعد قراءة ما ورد في **(Abo Al Ward, 2011)** حول كيفية حساب مجموع عناصر عمود في مصفوفة مرتبة من الأعداد الزوجية مبتدئين من العدد **2** وفق الشكل المعطى في **(1)** (أو من الأعداد الفردية مبتدئين من العدد **1**)، إلا أن ما ورد في **(Abo Al Ward, 2011)** لم يبين إلا علاقة بسيطة لحساب مجموع عناصر عمود فقط و هي مختلفة تماما عن الصيغ الرياضية التي توصلنا إليها على شكل خوارزميات فعالة جدا دون الحاجة لترتيب الأعداد الزوجية في مصفوفة من الشكل **(1)** (أو الفردية في مصفوفة من الشكل **(4)**). أخيرا، نصف خوارزميات فعالة لحساب:

i. عناصر أي عمود من أعمدة المصفوفة A.

ii. مجموع عناصر أي عمود من أعمدة المصفوفة A.

iii. مجموع عناصر عمود ما من أعمدة المصفوفة المربعة A إذا عرفنا مجموع عناصر أحد أعمدتها.

iv. مجموع عناصر أي سطر من أسطر المصفوفة المربعة A.

في حالتي المصفوفة A من النمطين **(1)** و **(4)**.

2. أهمية البحث

في هذه المقالة، نصف خوارزميات فعالة لحساب:

1) عناصر أي عمود من أعمدة المصفوفة A.
2) مجموع عناصر أي عمود من أعمدة المصفوفة A.
3) مجموع عناصر عمود ما من أعمدة المصفوفة المربعة A إذا عرفنا مجموع عناصر أحد أعمدتها.
4) مجموع عناصر أي سطر من أسطر المصفوفة المربعة A. في حالتي المصفوفة A من النمطين **(1)** و **(4)**.

3. خطة البحث

تتلخص خطة البحث في هذه المقالة في عدة خطوات يمكن إيجازها في العناوين التالية:

ما ورد في (Abo Al Ward, 2011) هو التالي:

هناك قاعدتان في جبر الأعداد تفيدان في عمليات الأتمتة، وفي العمليات الحسابية عن طريق الحاسب وذلك في الحصول على كم لانهائي من الأعداد التي تعجز الحاسبات التقليدية عن إجرائها حيث يضيف المؤلف **(Abo Al Ward, 2011)** أن القاعدة التي اكتشفها تنص على أنه إذا رتبنا الأعداد الزوجية على شكل مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الطبيعية ابتداء بالعدد**(2)** وانتهاء بأي عدد زوجي على شكل أعمدة عددها **(ن)** وأسطر عددها**(ن)** فإن ناتج جمع عناصر أي عمود فيها يعطى بالعلاقة: **ع = مج ع1 + 2(ن س+ن ع ت1)** حيث أن**(ع)** العمود المراد حسابه و**(ن س)**عدد السطر و**(ن ع)**عدد الأعمدة و **(ت 1)** ترتيب الأعمدة.

ما نود أن نقوله هو أنه لا يمكن القول أن هذه القاعدة تقدم ما يعجز عنه الحاسب لأنه لا يمكن أن نحسب يدويا أي عدد نريده و خاصة من مراتب عليا. بل بالعكس، هناك حواسيب ضخمة تستطيع حساب أعداد بلغت أرقامها عشرات الصفحات و خاصة بعد التطور الرهيب في علم الحاسب وطرائق توليد الأعداد و حسابها بلغة البرمجة على حواسيب فائقة السرعة وفقا للحساب المستخدم في الحاسب و وفق الحساب المتوازي أو التوزيعي. و بالتالي يجب أن نتوخى الدقة و الحذر في المعلومات التي نكتبها إذا لم يكن لدينا أية معرفة بعلمي الحاسب و الخوارزميات و كيفية حساب تعقيدها الزمني. علاوة على ذلك، هناك ثمة خطأ في القاعدة التي لم تشير إلى حساب مجموع عناصر العمود اعتبارا من مجموع عناصر العمود الثاني و هذه خطيئة إذ لا يمكن حساب مجموع عناصر العمود الأول إلا بحساب عناصره. كما أنه لا يمكن حساب مجموع عناصر أي عمود لا يقع على التوالي بعد العمود الذي حسبنا مجموع عناصره للتو.

في هذا الصدد نقول: عند التوصل لأية تطويرات أو أية تعديلات لابد من كتابتها بالسياق العلمي للبحث العلمي المتعارف عليه و إرسالها للمجلات العلمية العالمية المختصة لتحكيمها من قبل اختصاصيين و توضيح أهميتها و مدى جدواها و فعاليتها و ما تضيفه من قيمة علمية للوقوف على فحوى الفكرة.

2 .النتائج.

أولا. مجموعة الأعداد الزوجية.

لتكن $S=\{2,4,6,8,...\}=\{2i:i=1,2,3,...\}$ مجموعة الأعداد الزوجية. ننظم عناصر هذه المجموعة في مصفوفة مربعة A من المرتبة $n\geq 2$ وفق الشكل الذي أوردناه في المقدمة. تأخذ المصفوفة A من المراتب $n=2,3,4,5,10$ الشكل التالي:

$$A=\begin{bmatrix}2&4\\6&8\end{bmatrix}_{2\times 2}\ ,\ A=\begin{bmatrix}2&4&6\\8&10&12\\14&16&18\end{bmatrix}_{3\times 3}\ ,$$

$$A=\begin{bmatrix}2&4&6&8\\10&12&14&16\\18&20&22&24\\26&28&30&32\end{bmatrix}_{4\times 4}\ ,\ A=\begin{bmatrix}2&4&6&8&10\\12&14&16&18&20\\22&24&26&28&30\\32&34&36&38&40\\42&44&46&48&50\end{bmatrix}_{5\times 5}$$

و هكذا من المرتبة $n=10$ **:**

(1)

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 18 & 20 \\ 22 & 24 & 26 & 28 & 30 & 32 & 34 & 36 & 38 & 40 \\ 42 & 44 & 46 & 48 & 50 & 52 & 54 & 56 & 58 & 60 \\ 62 & 64 & 66 & 68 & 70 & 72 & 74 & 76 & 78 & 80 \\ 82 & 84 & 86 & 88 & 90 & 92 & 94 & 96 & 98 & 100 \\ 102 & 104 & 106 & 108 & 110 & 112 & 114 & 116 & 118 & 120 \\ 122 & 124 & 126 & 128 & 130 & 132 & 134 & 136 & 138 & 140 \\ 142 & 144 & 146 & 148 & 150 & 152 & 154 & 156 & 158 & 160 \\ 162 & 164 & 166 & 168 & 170 & 172 & 174 & 176 & 178 & 180 \\ 182 & 184 & 186 & 188 & 190 & 192 & 194 & 196 & 198 & 200 \end{bmatrix}_{10\times 10}$$

نلاحظ من هذه الأمثلة أنه إذا كانت $u_1,u_2,...,u_l,...,f$ هي عناصر السطر الأول في المصفوفة A، عندئذ يمكننا أن نكتب:

	1st column	2nd column	3rd column	. . .	*lth* column	. . . .	last column
1st row $\rightarrow$	u_1	u_2	u_3	. . .	u_l	. . . .	f
2nd row $\rightarrow$	u_1+f	u_2+f	u_3+f	. . .	u_l+f	. . . .	$2f$
3rd row $\rightarrow$	u_1+2f	u_2+2f	u_3+2f	. . .	u_l+2f	. . . .	$3f$
4th row $\rightarrow$	u_1+3f	u_2+3f	u_3+3f	. . .	u_l+3f	. . . .	$4f$

سنقدم في هذه المقالة خوارزميات فعالة لحساب:

1) العناصر $u_i+kf\ (i,k=1,2,...)$.
2) مجموع عناصر أي عمود.
3) مجموع عناصر عمود ما من أعمدة المصفوفة المربعة A إذا عرفنا مجموع عناصر أحد أعمدتها.
4) مجموع عناصر أي سطر من أسطر المصفوفة المربعة A.

3.1. حساب عناصر أي عمود

يمكن حساب جميع عناصر أعمدة أي مصفوفة مربعة A من أية مرتبة $n \geq 2$ وفق الشكل المعطى في **(1)** دون الحاجة إلى تنظيمها وفق النمط الذي ذكرناه أعلاه من خلال الأمثلة كما يلي: لنفرض أنه يمكن تمثيل أي عمود من أعمدة المصفوفة A بالشكل التالي:

$$\left.\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{k-1} \\ a_k \end{bmatrix}\right\} \text{Column number } l \qquad \textbf{(2)}$$

مكتفين بالسطر k لتوضيح خوارزمية حساب عناصر أي عمود. تمثل العلاقة **(2)** العمود رقم $l = 1, 2, 3, ..., n$ في المصفوفة المربعة A المراد حساب عناصره والتي يمكن الحصول عليها بتطبيق العلاقات التالية:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2l \\ a_k &= 2l + n\left(2\left(k-1\right)\right),\ k = 2, 3, 4, ... \end{aligned} \qquad \textbf{(3)}$$

يتضح من العلاقة **(3)** أنه لحساب جميع عناصر العمود $l = 1, 2, 3, ..., n$ يكفي معرفة العنصر الأول $a_1 = 2l$ في العمود المراد حساب بقية عناصره. هذه الفكرة هي إحدى الأفكار المطروحة للحل في هذه المقالة.

3.2. استنتاج العلاقة (3)

ليكن $l = 1, 2, 3, ..., n$ رقم العمود المطلوب حساب عناصره ومجموع عناصره، عندئذ يعطى العنصر الأول a_1 في العمود المراد حسابه وليكن $l = 1, 2, 3, ..., n$ بالصيغة التالية: $a_1 = 2l$.

ليكن a_k العنصر الواقع في الموضع k من العمود $l=1,2,3,...,n$ ، عندئذ يمكن حسابه من العنصر a_{k-1} الواقع في الموضع $k-1$ من العمود $l=1,2,3,...,n$ و ذلك بملاحظة أن $a_1=2l$ كما أسلفنا في **(1)**. مما سيق نجد أن:

$$a_k=a_{k-1}+2n \ , \ k=2,3,4,...$$

وهي معادلة فرقية **(عودية)** يمكن حلها بالطريقة التكرارية لإيجاد الحل العام التحليلي وفق ما يلي:

$$k=2\Rightarrow a_2=a_1+2n$$

$$k=3\Rightarrow a_3=a_2+2n=\underbrace{a_1+2n}_{a_2}+2n=a_1+2\times 2n$$

$$k=4\Rightarrow a_4=a_3+2n=\underbrace{a_2+2n}_{a_3}+2n=a_1+2n+2n+2n=a_1+3\times 2n$$

. . .

$$k=m\Rightarrow a_m=a_{m-1}+2n=a_1+2(m-1)n$$

$$a_k=a_{k-1}+2n=a_1+2(k-1)n$$

$$\text{but } a_1=2l\Rightarrow a_k=2l+2(k-1)n$$

و منه نصل إلى المبرهنة التالية:

مبرهنة 1: تعطى عناصر العمود $l=1,2,3,...,n$ و لتكن $k=2,3,4,...$, a_k بالصيغة التالية:

$$a_k=2l+2(k-1)n=2\left(l+(k-1)n\right)$$

نتيجة هامة1 : يتضح من المبرهنة 1 أنه يمكن حساب أي عنصر $k=2,3,4,...$, a_k أو جميع العناصر في عمود ما إذا علمنا فقط رقم العمود $l=1,2,3,...,n$.

تطبيق: لحساب عناصر العمود رقم $l=3\&n=10$ ، مثلا، من المصفوفة المعطاة في العلاقة (1)، نطبق العلاقة من المبرهنة 1 كما يلي:

$$a_1 = 2l = 6$$
$$k = 2 \Rightarrow a_k = 2l + n\left(2\left(k-1\right)\right) = 2\times 3 + 10\left(2\left(2-1\right)\right) = 6 + 10\left(2\right) = 26$$
$$k = 3 \Rightarrow a_k = 2l + n\left(2\left(k-1\right)\right) = 2\times 3 + 10\left(2\left(3-1\right)\right) = 6 + 10\left(4\right) = 46$$
$$k = 4 \Rightarrow a_k = 2l + n\left(2\left(k-1\right)\right) = 2\times 3 + 10\left(2\left(4-1\right)\right) = 6 + 10\left(6\right) = 66$$
$$k = 5 \Rightarrow a_k = 2l + n\left(2\left(k-1\right)\right) = 2\times 3 + 10\left(2\left(5-1\right)\right) = 6 + 10\left(8\right) = 86$$
$$k = 6 \Rightarrow a_k = 2l + n\left(2\left(k-1\right)\right) = 2\times 3 + 10\left(2\left(6-1\right)\right) = 6 + 10\left(10\right) = 106$$
$$k = 7 \Rightarrow a_k = 2l + n\left(2\left(k-1\right)\right) = 2\times 3 + 10\left(2\left(7-1\right)\right) = 6 + 10\left(12\right) = 126$$
$$k = 8 \Rightarrow a_k = 2l + n\left(2\left(k-1\right)\right) = 2\times 3 + 10\left(2\left(8-1\right)\right) = 6 + 10\left(14\right) = 146$$
$$k = 9 \Rightarrow a_k = 2l + n\left(2\left(k-1\right)\right) = 2\times 3 + 10\left(2\left(9-1\right)\right) = 6 + 10\left(16\right) = 166$$
$$k = 10 \Rightarrow a_k = 2l + n\left(2\left(k-1\right)\right) = 2\times 3 + 10\left(2\left(10-1\right)\right) = 6 + 10\left(18\right) = 186$$

مما سبق يمكن صياغة طريقة حساب عناصر أي عمود $l = 1,2,3,...,n$ وفق الخوارزمية التالية:

خوارزمية 1: حساب عناصر العمود $l = 1,2,...,n$

(Algorithm 1: $Comp_Col_Elements$ **)**

الخطوة 1: نختار قيمة ما للمتغير $l = 1,2,...,n$ للحصول على عناصر العمود المطلوب.

الخطوة 2: تطبيق الصيغة $a_k = 2l + 2\left(k-1\right)n$ لحساب عناصر العمود المطلوب حسابه، حيث. $k = 2,3,4,...$

بعد حساب عناصر أي عمود يمكننا حساب مجموع عناصره ويمكن تلخيص ذلك من خلال الخوارزمية التالية:

خوارزمية 2: حساب مجموع عناصر العمود $l = 1,2,...,n$

(Algorithm 2: $Sum_Col_Elements$ **)**

الخطوة 1: نختار قيمة للمتغير n الذي يمثل عدد عناصر العمود $l = 1,2,...,n$.

الخطوة 2: نختار رقم العمود المراد حساب مجموع عناصره. أي نعطي قيمة للمتغير $l = 1,2,...,n$.

الخطوة 3: نضع $sum = a_1 = 2l$ مجموع عناصر العمود $l = 1,2,...,n$.

الخطوة 4: تطبيق العلاقة $\left(a_k = 2l + (k-1)2n\right)$ لحساب $sum = sum + a_k$.

في الحقيقة يمكن حساب عناصر العمود $l = 1, 2, ..., n$ و مجموعها على التوازي باستخدام Matlab و يمكن توضيح ذلك من خلال الخوارزمية التالية:

خوارزمية 3: حساب عناصر عمود ما و مجموع عناصر العمود على التوازي:

(Algorithm 3:$Comp_Col_Elements \leftrightarrow Sum_Col_Elements$)

Step1:Choose $l = 1, 2, ..., n$ (l is the number of column required to be computed)

Step2: sum $= a_1 = 2l$ (sum is the summation of the required column's elements)

Step3: For $k = 2, 3, 4, ..., n$

(i) Compute the elements: $a_k = 2l + n\left(2(k-1)\right)$

(ii) Compute: sum=sum+a_k

(iii) Print the elements a_k : namely, disp(a_k)

(iv) Print the summation of column's elements:

namely,disp(sum)

End

تنفيذ خوارزمية 3: حساب عناصر عمود ما و مجموع عناصر العمود على التوازي باستخدام Matlab13a من أجل $l = 5 \& n = 10$:

(Algorithm 3:$Comp_Col_Elements \leftrightarrow Sum_Col_Elements$)

Let $n = 10$: number of elements of the required column to be computed
Let $l = 5$: number of column to be computed
Let $sum5$: The summation of column for $l = 5$
Compute: $a(1) = 2 * l$
Put: $sum5 = a(1)$
Compute: For k=2:n

$a(k) = 2 * l + n * (2 * (k - 1))$
$sum5 = sum5 + a(k)$
$disp(a(k))$
$disp(sum5)$

End

Compute the summmation of column $l = 6$ using

sum6=sum5+2*n

النتائج هي:

Computing the elements of 5th column

a= 10 30 50 70 90 110 130 150 170 190

Summation of the 5 th column: sum5 =1000

Summation of the sixth column: sum6 =1020

وهي مطابقة لما أوردناه سابقا في الأمثلة على كيفية تنظيم المصفوفة A في الشكل (1).

ملاحظة: يمكن حساب مجموع عناصر العمود الذي نحن بصدد حساب عناصره مباشرة باستخدام Matlab وفق الأمر **sum(a)** في نهاية حساب عناصر العمود. و هي ميزة من مزايا الخوارزمية 1 المقترحة.

ملاحظة 2: مجموع عناصر القطر الرئيسي يساوي مجموع عناصر القطر الثانوي. ففي المثال السابق لدينا:

عناصر القطر الرئيسي = مجموع عناصر القطر الثانوي=1010

3.3. إيجاد صيغة تحليلية لحساب مجموع عناصر عمود

يمكن إيجاد صيغة رياضية تمكننا من حساب مجموع عناصر أي عمود من أعمدة المصفوفة **(1)** كما يلي:

نعلم أن:

$$a_k = 2l + 2n(k-1), k = 1,2,...,n$$

$$\left.\begin{array}{l} k=1 \Rightarrow a_1 = 2l \\ k=2 \Rightarrow a_2 = 2l + 2n(1) \\ k=3 \Rightarrow a_3 = 2l + 2n(2) \\ k=4 \Rightarrow a_4 = 2l + 2n(3) \\ . \\ . \\ . \\ k=n \Rightarrow a_n = 2l + 2n(n-1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i = 2l + 2l + 2n(1) + 2l + 2n(2) + 2l + 2n(3) + ... + 2l + 2n(n-1)$$

$$= 2l(n) + 2n(1+2+3+...+(n-1))$$

$$= 2l(n) + 2n\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) = 2l(n) + n^2(n-1)$$

$$Sum_l = 2l(n) + n^2(n-1)$$

فمثلا من أجل $l = 5, n = 10$ ، نجد أن

$$Sum_5 = 2l(n) + n^2(n-1)(l = 5 \& n = 10)$$

$$= 2(5)(10) + (10)^2(10-1)$$

$$= 100 + 100(9)$$

$$= 100 + 900 = 1000$$

و منه نصل إلى المبرهنة التالية:

مبرهنة 2: يمكن حساب مجموع عناصر عمود $l = 1,2,3,...,n$ من أعمدة المصفوفة A وفق الصيغة التالية:

$$Sum_l = 2l(n) + n^2(n-1)$$

حيث n هو مرتبة المصفوفة المربعة A.

3.4. حساب مجموع عناصر عمود ما إذا علم مجموع عناصر أحد أعمدة المصفوفة A .

يمكن حساب مجموع عناصر عمود ما من أعمدة المصفوفة A إذا علمنا مجموع عناصر أحد أعمدتها كما يلي:

بعد حساب Sum_{l_1} مجموع عناصر العمود l_1 ، عندئذ يمكن حساب مجموع عناصر أي عمود آخر l_2 وفق الصيغة:

$$Sum_{l_2} = Sum_{l_1} + 2nl_2 - 2nl_1 = Sum_{l_1} + 2n\left(l_2 - l_1\right)$$

فمثلا، من أجل $l_1 = 5 \& l_2 = 8 \& n = 10$ نجد أن:

$$\begin{aligned} sum_{l_8}\left(=sum_8\right) &= sum_{l_1}\left(=sum_5\right) + 2n\left(l_2 - l_1\right) \\ &= sum_5\left(=1000\right) + 2\left(10\right)\left(8-5\right) \\ &= 1000 + 60 = 1060 \end{aligned}$$

3.5. تعقيد الخوارزميات المقترحة لحساب عناصر أي عمود و مجموعها.

نحاول في هذه الفقرة أن نلقي الضوء على تعقيد الخوارزميات المقترحة في هذه المقالة لتوضيح فعاليتها:

أولا: تعقيد الخوارزمية 1: وجدنا أنه من أجل اي عمود $l = 1, 2, ..., n$ فإنه يمكن حساب عناصره $a_k \;,\; k = 2, 3, 4, ..., n$ بالصيغة التالية:

$$a_k = 2l + 2\left(k-1\right)n = 2\left(l + \left(k-1\right)n\right)$$

بملاحظة بسيطة نجد أنه يمكن حساب جميع عناصر أي عمود وفق الخوارزمية 1 بتعقيد زمني يعطى بالصيغة $\mathrm{O}\left(n\right)$. أي أن تعقيد الخوارزمية 1 خطي، وبالتالي فإن الخوارزمية **1** فعالة جدا ويمكن تطبيقها بأية لغة حاسوبية نظرا لسهولة تنفيذها و بساطتها.

ثانيا: تعقيد الخوارزمية 2: يمكن حساب تعقيد الخوارزمية **2** لحساب مجموع عناصر أي عمود كما يلي:

$$Sum_l = 2l\left(n\right) + n^2\left(n-1\right) \approx \mathrm{O}\left(n^3\right)$$

أي أن تعقيد الخوارزمية **2** من مرتبة كثيرات الحدود $\mathrm{O}\left(n^3\right)$ وبالتالي فالخوارزمية **2** فعالة.

ثالثا: تعقيد الخوارزمية 3: يمكن حساب تعقيد الخوارزمية **2** لحساب مجموع عناصر أي عمود كما يلي:

بحسابات بسيطة يمكن التوصل لصيغة تعطينا علاقة يمكن من خلالها حساب مجموع عناصر أي عمود إذا علمنا مجموع عناصر أحد أعمدة المصفوفة A كما يلي:

يمكن حساب مجموع عناصر عمود $l=1,2,3,...$ من أعمدة المصفوفة A وفق الصيغة التالية:

$$Sum_l = 2l(n) + n^2(n-1)$$

بما أن $Sum_{l_1} = 2l_1(n) + n^2(n-1) \approx O(n^3)$ مجموع عناصر العمود l_1، فإنه يمكن حساب مجموع عناصر أي عمود آخر l_2 وفق الصيغة:

$$Sum_{l_2} = Sum_{l_1} + 2nl_2 - 2nl_1 = Sum_{l_1} + 2n(l_2 - l_1)$$

وبالتالي:

$$\begin{aligned} Sum_{l_2} &= Sum_{l_1} + 2nl_2 - 2nl_1 \\ &= 2l_1(n) + n^2(n-1) + 2n(l_2 - l_1) \approx O(n^3) \end{aligned}$$

3.6. حساب مجموع عناصر أسطر المصفوفة (1)

نحاول في هذه الفقرة اشتقاق علاقة رياضية تعطينا مجموع عناصر أي سطر من أسطر المصفوفة **(1)** المربعة من المرتبة n.

i. حساب مجموع عناصر السطر الأول:

$$\begin{aligned} \text{sum}_1 &= 2+4+6+8+...+2n = 2(1+2+3+4+...+n) \\ &= 2\sum_{i=1}^{n} i = 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = n(n+1) \end{aligned}$$

ii. حساب مجموع عناصر السطر الثاني:

بما أن كل عنصر من عناصر السطر الثاني ينتج من العنصر الواقع في السطر الأولى و في العمود ذاته بإضافة العدد $2n$ ، فإن:

$$\begin{aligned}\text{sum}_2 &= (2+2n)+(4+2n)+(6+2n)+(8+2n)+\ldots+(2n+2n)\\ &= (2+4+6+8+\ldots+2n)+\underbrace{(2n+2n+\ldots+2n)}_{n\,times}\\ &= 2(1+2+3+4+\ldots+n)+2n^2\\ &= n(n+1)+2n^2\end{aligned}$$

iii. حساب مجموع عناصر السطر الثالث:

بما أن كل عنصر من عناصر السطر الثالث ينتج من العنصر الواقع في السطر الثاني و في العمود ذاته بإضافة العدد $4n$ ، فإن:

$$\begin{aligned}\text{sum}_3 &= (2+4n)+(4+4n)+(6+4n)+(8+4n)+\ldots+(2n+4n)\\ &= (2+4+6+8+\ldots+2n)+\underbrace{(4n+4n+\ldots+4n)}_{n\,times}\\ &= 2(1+2+3+4+\ldots+n)+2(2n^2)\\ &= n(n+1)+2(2n^2)\end{aligned}$$

iv. حساب مجموع عناصر السطر الرابع:

بما أن كل عنصر من عناصر السطر الرابع ينتج من العنصر الواقع في السطر الثالث و في العمود ذاته بإضافة العدد $6n$ ، فإن:

$$\begin{aligned}\text{sum}_4 &= (2+6n)+(4+6n)+(6+6n)+(8+6n)+\ldots+(2n+6n)\\ &= (2+4+6+8+\ldots+2n)+\underbrace{(6n+6n+\ldots+6n)}_{n\,times}\\ &= 2(1+2+3+4+\ldots+n)+3(2n^2)\\ &= n(n+1)+3(2n^2)\end{aligned}$$

مما سبق نستنتج أن مجموع عناصر السطر الأخير يعطى بالصيغة:

$$\text{sum}_n = n(n+1)+(n-1)(2n^2)$$

وبشكل عام تعطى الصيغة العامة لمجموع عناصر أي سطر $k = 1,2,3,\ldots,n$ من أسطر **(1)** بالصيغة التالية:

$$\text{sum}_k = n(n+1)+2(k-1)n^2\ ,\ k = 1,2,3,\ldots,n$$

و هكذا نصل إلى المبرهنة التالية:

مبرهنة 3: يعطى مجموع عناصر أي سطر $k=1,2,3,...,n$ من أسطر **(1)** بالصيغة التالية:

$$\text{sum}_k = n(n+1)+2(k-1)n^2 \ , \ k=1,2,3,...,n$$

تطبيق: لنأخذ المصفوفة **(1)** من المرتبة $n=5$. بتطبيق المبرهنة **3** نجد أن:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 12 & 14 & 16 & 18 & 20 \\ 22 & 24 & 26 & 28 & 30 \\ 32 & 34 & 36 & 38 & 40 \\ 42 & 44 & 46 & 48 & 50 \end{bmatrix}$$

$$k=1 \Rightarrow \text{sum}_1 = n(n+1)+2(k-1)n^2 = 5(6)+2(0)(5)^2 = 30$$

$$k=2 \Rightarrow \text{sum}_2 = n(n+1)+2(k-1)n^2 = 5(6)+2(1)(5)^2 = 80$$

$$k=3 \Rightarrow \text{sum}_3 = n(n+1)+2(k-1)n^2 = 5(6)+2(2)(5)^2 = 130$$

$$k=4 \Rightarrow \text{sum}_4 = n(n+1)+2(k-1)n^2 = 5(6)+2(3)(5)^2 = 180$$

$$k=5 \Rightarrow \text{sum}_5 = n(n+1)+2(k-1)n^2 = 5(6)+2(4)(5)^2 = 230$$

ثانيا. مجموعة الأعداد الفردية

لتكن $S=\{1,3,5,7,...\}=\{2i-1 : i=1,2,3,...\}$ مجموعة الأعداد الفردية. ننظم عناصر هذه المجموعة في مصفوفة مربعة A من المرتبة $n \geq 2$ وفق النمط الذي اتبعناه سابقا من أجل الأعداد الزوجية. لنأخذ مثلا $n=10$ ، عندئذ تأخذ المصفوفة A الشكل التالي:

(4)

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & 17 & 19 \\ 21 & 23 & 25 & 27 & 29 & 31 & 33 & 35 & 37 & 39 \\ 41 & 43 & 45 & 47 & 49 & 51 & 53 & 55 & 57 & 59 \\ 61 & 63 & 65 & 67 & 69 & 71 & 73 & 75 & 77 & 79 \\ 81 & 83 & 85 & 87 & 89 & 91 & 93 & 95 & 97 & 99 \\ 101 & 103 & 105 & 107 & 109 & 111 & 113 & 115 & 117 & 119 \\ 121 & 123 & 125 & 127 & 129 & 131 & 133 & 135 & 137 & 139 \\ 141 & 143 & 145 & 147 & 149 & 151 & 153 & 155 & 157 & 159 \\ 161 & 163 & 165 & 167 & 169 & 171 & 173 & 175 & 177 & 179 \\ 181 & 183 & 185 & 187 & 189 & 191 & 193 & 195 & 197 & 199 \end{bmatrix}$$

يمكن حساب عناصر جميع أعمدة المصفوفة A المعطاة في **(4)** كما يلي: لنفرض أنه يمكن تمثيل أي عمود من أعمدة المصفوفة **(4)** بالشكل التالي:

$$\left.\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{k-1} \\ a_k \end{bmatrix}\right\} \text{Column number } l \qquad \textbf{(5)}$$

تمثل العلاقة **(5)** العمود رقم $l=1,2,...,n$ في المصفوفة A المعطاة في **(4)** المراد حساب عناصره والتي يمكن الحصول عليها بتطبيق العلاقات التالية:

$$\begin{aligned} a_1 &= (2l-1) \\ a_k &= (2l-1)+2(k-1)n,\ k=2,3,4,...,n \end{aligned} \qquad \textbf{(6)}$$

والتي هي نتيجة هامة في هذه المقالة.

نحاول في هذه الفقرة استنتاج صيغ رياضية تمكننا من حساب:

حساب مجموع عناصر أسطر المصفوفة **(4)**

إيجاد صيغة تحليلية لحساب مجموع عناصر عمود في **(4)**

i. حساب مجموع عناصر عمود ما إذا علم مجموع عناصر أحد أعمدة المصفوفة A.

(1). حساب مجموع عناصر أسطر المصفوفة **(4)**

نحاول في هذه الفقرة اشتقاق علاقة رياضية تعطينا مجموع عناصر أي سطر من أسطر المصفوفة **(4)** المربعة من المرتبة n.

ii. حساب مجموع عناصر السطر الأول:

$$\text{sum}_1 = 1+3+5+7+\ldots+(2n-1) = (1+2+3+4+5+6+7+8+9+\ldots+(2n-1)+2n) - (2+4+6+8+\ldots+2n)$$

$$= \sum_{i=1}^{2n} i - 2(1+2+3+4+5+6+\ldots+n) = \frac{2n(2n+1)}{2} - 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$= \frac{4n^2+2n-2n^2-2n}{2} = n^2$$

iii. حساب مجموع عناصر السطر الثاني:

بما أن كل عنصر من عناصر السطر الثاني ينتج من العنصر الواقع في السطر الأولى وفي العمود ذاته بإضافة العدد $2n$ ، فإن:

$$\text{sum}_2 = n^2 + \underbrace{(2n+\ldots+2n)}_{n\,times} = n^2 + (n)(2n) = 3n^2$$

iv. حساب مجموع عناصر السطر الثالث:

بما أن كل عنصر من عناصر السطر الثالث ينتج من العنصر الواقع في السطر الثاني وفي العمود ذاته بإضافة العدد $4n$ ، فإن:

$$\text{sum}_3 = n^2 + \underbrace{(4n+\ldots+4n)}_{n\,times} = n^2 + (n)(4n) = 5n^2$$

v. حساب مجموع عناصر السطر الرابع:

بما أن كل عنصر من عناصر السطر الرابع ينتج من العنصر الواقع في السطر الثالث و في العمود ذاته بإضافة العدد $6n$ ، فإن:

$$\text{sum}_4 = n^2 + \underbrace{\left(6n + ... + 6n\right)}_{n\,times} = n^2 + \left(n\right)\left(6n\right) = 7n^2$$

مما سبق نستنتج أن مجموع عناصر السطر الأخير يعطى بالصيغة:

$$\text{sum}_n = \left(2n-1\right)n^2$$

وبشكل عام تعطى الصيغة العامة لمجموع عناصر أي سطر $k = 1,2,3,...,n$ من أسطر **(4)** بالصيغة التالية:

$$\text{sum}_k = \left(2k+1\right)n^2 \;,\; k = 0,2,3,...,n-1$$

و هكذا نصل إلى المبرهنة التالية:

مبرهنة 4: يعطى مجموع عناصر أي سطر $k = 1,2,3,...,n$ من أسطر **(4)** بالصيغة التالية:

$$\text{sum}_k = \left(2k+1\right)n^2 \;,\; k = 0,2,3,...,n-1$$

تطبيق: لنأخذ المصفوفة **(4)** من المرتبة $n = 5$. بتطبيق المبرهنة **4** نجد أن:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 11 & 13 & 15 & 17 & 19 \\ 21 & 23 & 25 & 27 & 29 \\ 31 & 33 & 35 & 37 & 39 \\ 41 & 43 & 45 & 47 & 49 \end{bmatrix}$$

$$\text{sum}_k = \left(2k+1\right)n^2 \;,\; k = 0,2,3,...,n-1$$

$$k = 0 \Rightarrow \text{sum}_1 = n^2\left(2\left(0\right)+1\right) = 5^2\left(1\right) = 25$$

$$k = 1 \Rightarrow \text{sum}_2 = n^2\left(2\left(1\right)+1\right) = 5^2\left(3\right) = 75$$

$$k = 2 \Rightarrow \text{sum}_3 = n^2\left(2\left(2\right)+1\right) = 5^2\left(5\right) = 125$$

$$k = 3 \Rightarrow \text{sum}_4 = n^2\left(2\left(3\right)+1\right) = 5^2\left(7\right) = 175$$

$$k = 4 \Rightarrow \text{sum}_5 = n^2\left(2\left(4\right)+1\right) = 5^2\left(9\right) = 225$$

(2). إيجاد صيغة تحليلية لحساب مجموع عناصر عمود في (4)

يمكن إيجاد صيغة رياضية تمكننا من حساب مجموع عناصر أي عمود من أعمدة المصفوفة **(4)** كما يلي: نعلم أن:

$$a_k = (2l-1)+2n(k-1), k = 1,2,...,n$$

$$\left.\begin{array}{l} k=1 \Rightarrow a_1 = 2l-1 \\ k=2 \Rightarrow a_2 = 2l-1+2n(2-1) \\ k=3 \Rightarrow a_3 = 2l-1+2n(3-1) \\ k=4 \Rightarrow a_4 = 2l-1+2n(4-1) \\ . \\ . \\ . \\ k=n \Rightarrow a_n = 2l-1+2n(n-1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i = 2l-1+2l-1+2n(2-1)+2l-1+2n(3-1)+$$
$$+2l-1+2n(4-1)+...+2l-1+2n(n-1)$$
$$=(2l-1)\underbrace{(1+1+...+1)}_{n}+2n(2+3+...+n)-2n\underbrace{(1+1+...+1)}_{(n-1)times}$$
$$=(2l-1)(n)+2n(1+2+3+...+n)-2n^2$$
$$=(2l-1)(n)+2n\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)-2n^2$$
$$=(2l-1)(n)+n^3(n+1)-2n^2$$
$$=(2l-1)(n)+n^3-n^2$$

$$Sum_l = n^3-n^2+(2l-1)n$$

فمثلا من أجل $l=4, n=6$ **، نجد أن:**

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 13 & 15 & 17 & 19 & 21 & 23 \\ 25 & 27 & 29 & 31 & 33 & 35 \\ 37 & 39 & 41 & 43 & 45 & 47 \\ 49 & 51 & 53 & 55 & 57 & 59 \\ 61 & 63 & 65 & 67 & 69 & 71 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} Sum_4 &= n^3 - n^2 + (2l-1)n = (l=4 \,\&\, n=6) \\ &= 6^3 - 6^2 + (2\times 4 - 1)\times 6 \\ &= 216 - 36 + (7)\times 6 \\ &= 180 + 42 = 222 \end{aligned}$$

و منه نصل إلى المبرهنة التالية:

مبرهنة 5: يمكن حساب مجموع عناصر عمود $l = 1,2,3,\ldots$ من أعمدة المصفوفة A في **(4)** وفق الصيغة التالية:

$$Sum_l = n^3 - n^2 + (2l-1)n$$

حيث n هو مرتبة المصفوفة المربعة A.

(3). حساب مجموع عناصر عمود ما إذا علم مجموع عناصر أحد أعمدة المصفوفة A

يمكن حساب مجموع عناصر عمود ما من أعمدة المصفوفة A إذا علمنا مجموع عناصر أحد أعمدتها كما يلي:

بعد حساب Sum_{l_1} مجموع عناصر العمود l_1 ، عندئذ يمكن حساب مجموع عناصر أي عمود آخر l_2 وفق الصيغة:

$$Sum_{l_2} = Sum_{l_1} + 2nl_2 - 2nl_1 = Sum_{l_1} + 2n(l_2 - l_1)$$

فمثلا، من أجل $l_1 = 4 \,\&\, l_2 = 2 \,\&\, n = 6$ نجد أن:

$$\begin{aligned} sum_{l_1}(=sum_4) &= sum_{l_2}(=sum_2) + 2n(l_1 - l_2) \\ &= sum_2(=198) + 2(6)(4-2) = 198 + 24 = 222 \end{aligned}$$

4.الخاتمة.

قدمنا في هذه المقالة خوارزميات فعالة تعقيدها $O(n)$ لحساب عناصر عمود من الأعداد الزوجية (أو الفردية) وحساب مجموعها وفق خوارزمية تعقيدها $O(n^3)$. يعطى مجموع عناصر عمود وفق صيغة رياضية تحليلية يسهل تطبيقها حاسوبيا. بمساعدة هذه الصيغة يمكن حساب مجموع عناصر أي عمود انطلاقا من حساب مجموع عناصر أحد أعمدة المصفوفة A . طبقنا جميع الخوارزميات المقترحة حاسوبيا بلغة Matlab13a [2].

المراجع

[1] Abo Al Ward, **J**., **2011**, (see his site).

[2] Attaway, **S**., **2009**, Matlab: **A** Practical Introduction to Programming and Problem Solving, College of Engineering, Boston University, Boston, MA **01803**, Elsevier, **Inc**., **USA**, **PP.343.**