دراسة جمل من كثيرات حدود متعامدة مولدة من كثيرات حدود تشيبيشيف من النوع الاول

عبد الله السلطان د. محمد نضال خطيب

قسم الرياضيات, كلية العلوم , جامعة ادلب

الملخص

تناولنا في هذا البحث دراسة حالات أكثر عموماً لكثيرات حدود تشيبيشيف من النوع الأول $T_n(x)$ ومحاولة استنتاج أهم الخواص لهذه الحالات .

Abstract

In this study, we show a more general study of first kind Chebyshev polynomial $T_n(x)$, and try to conclusion the most important properties of these cases.

1- المقدمة:

كثيرات حدود تشيبيشيف هي جملة من كثيرات الحدود المتعامدة orthogonal (polynomials) على المجال $[-1,1]$, ويعود اسمها إلى العالم الروسي بافنوتي تشيبيشيف (Pafnuty Chebyshev), ولها نوعين أساسيين ,وهما كثيرات حدود تشيبيشيف من النوع الأول $T_n(x)$ (first kind Chebyshev polynomial) ,وكثيرات حدود تشيبيشيف من النوع الثاني $U_n(x)$ (second kind Chebyshev polynomial).

2- أهم التعاريف والخواص اللازمة للبحث :

2-1- جمل التوابع المتعامدة:

بشكل عام إذا كانت $\{\varphi_n(x)\}$ جملة من التوابع الحقيقية المستمرة جزئياً على المجال (a,b) ,فإننا نقول عن هذه الجملة أنها متعامدة إذا كان أي زوج من التوابع من هذه الأسرة متعامد أي:

$$(\varphi_n(x),\varphi_m(x))=\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx=0 \qquad (n\neq m)$$

2-2- مفهوم التعامد العام:

لتكن $\{\varphi_n(x)\}$ جملة من التوابع المعرفة على المجال (a,b) ,وليكن $\rho(x)$ تابع مستمر على المجال (a,b) ,وغير متناقص عندئذٍ نقول عن الجملة $\{\varphi_n(x)\}$ أنها متعامدة بالوزن $\rho(x)$ على المجال (a,b) إذا كان :

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)\rho(x)dx=0 \qquad (n\neq m)$$.

2-3- كثيرات حدود تشيبيشيف من النوع الأول $T_n(x)$:

وهي جملة من كثيرات الحدود المتعامدة على المجال $[-1,1]$,وبوزن التعامد $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ وتحقق العلاقة :

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=0 \qquad ;n\neq m \qquad (1)$$

$$\int_{-1}^{1} |T_0(x)|^2\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\pi$$

$$\int_{-1}^{1} |T_n(x)|^2\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2} \qquad (n\neq 0)$$

بعبارة اخرى $\|T_0\|=\sqrt{\pi}$, $\|T_n(x)\|=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ وذلك في الفضاء $L^2_{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}[-1,1]$

أي أن عناصر هذه الجملة تقع على الدائرة $\|x\|=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ عدى العنصر T_0 .

$\boldsymbol{T_n(x)}$ تشكل حل للمعادلة التفاضلية :

$$(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0 \qquad \textbf{(2)}$$

_ كثيرات حدود شـــيبيشـــيف من النوع الأول يمكن تعريفها بعدة طرق أهمها الصـــيغة المثلثية(Trigonometric formula) ,والصـــيغة التكرارية (recurrences formula).

الصيغة المثلثية : تعرف كثيرات حدود تشيبيشيف من النوع الأول بالعلاقة:

$$\boldsymbol{T_n(x)=\cos nt \quad ; \quad x=\cos t} \qquad \textbf{(3)}$$

الصيغة التكرارية:

(4)

$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)$$

$$T_1(x)=x$$

$$T_0(x)=1$$

فيما يلي بعض العلاقات التي تحققها الجملة $\{T_n(x)\}$:

$$\int T_n(x)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{T_{n+1}(x)}{n+1}-\frac{T_{n-1}(x)}{n-1}\right]+c \qquad ;n\geq 2 \qquad (5)$$

$$(1-x^2)T_n'(x)=-nxT_n(x)+nT_{n-1}(x) \qquad ;n\geq 2 \qquad (6)$$

$$T_{n+m}(x)+T_{|n-m|}(x)=2T_n(x)T_m(x) \qquad (7)$$

(8)

$$\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{n}T_m(x)T_m(y)=\frac{1}{2}\left[\frac{T_{n+1}(x)T_n(y)-T_n(x)T_{n+1}(y)}{x-y}\right]$$

(9)

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{[n/2]}\left((-1)^k\sum_{j=k}^{[n/2]}\binom{n}{2j}\binom{j}{k}\right)x^{n-2k}$$

سنستعرض في هذا البحث ثلاث جمل متعامدة مولدة من الجملة $\{T_n(x)\}$,وفي حالات عامة.

3- الجملة $\{T_n^m(x)\}$: حيث $m\in N$

حيث أن $T_n^m(x)$ تنتج عن $T_n(s)$ بإجراء التحويل الخطي $s=\frac{x}{m}$ أي أن

$$T_n^m(x)=T_n(x/m)$$

3-1- خواص الجملة $\{T_n^m(x)\}$:

1) الجملة $\{T_n(x)\}$ هي حالة خاصة من الجملة $\{T_n^m(x)\}$,وذلك من أجل $m=1$.

2) الجملة $\{T_n^m(x)\}$ جملة من كثيرات الحدود المتعامدة على المجال $[-m,m]$ ووزن التعامد $\frac{1}{\sqrt{m^2-x^2}}$,وذلك ينتج مباشرة من العلاقة (1) باستبدال كل x ب $\frac{x}{m}$:

$$\int_{-m}^{m}T_n(x/m)T_l(x/m)\frac{1}{\sqrt{1-\left(x/m\right)^2}}d(x/m)=\int_{-m}^{m}T_n^m(x)T_l^m(x)\frac{1}{\sqrt{m^2-x^2}}dx=0$$

حيث $n\neq l$

3) العلاقة التدريجية للجملة $\{T_n^m(x)\}$:

$$T_{n+1}^{m}(x)=2\frac{x}{m}T_{n}^{m}(x)-T_{n-1}^{m}(x)$$

$$T_{0}^{m}(x)=1 \qquad\qquad T_{1}^{m}(x)=\frac{x}{m}$$

تنتج من العلاقة **(4)** باستبدال كل x ب $\frac{x}{m}$.

4) الصيغة المثلثية للجملة $\{T_n^m(x)\}$:

$$T_n^m(x)=\cos nt \quad \text{حيث} \quad x=m\cos t$$

تنتج مباشرة من العلاقة **(3)**.

5) أصفار التابع $T_n^m(x)$:

لكثيرة الحدود $T_n^m(x)$ $\boldsymbol{n}$ صـــفر مختلف على المجال $[-\boldsymbol{m},\boldsymbol{m}]$ يمكن إيجاد من الصيغة المثلثية ل $T_n^m(x)$:

$$T_n^m(x)=0\Rightarrow \cos nt=0\Rightarrow t=\frac{(1+2k)}{2n}\pi \qquad ;k=0,1,....,n-1$$

$$\Rightarrow x_k=m.\cos\frac{(1+2k)}{2n}\pi \qquad ;k=0,1,....,n-1$$

هي أصفار التابع $T_n^m(x)$.

6) القيم العظمى للتابع $|T_n^m(x)|$:

التـابع $T_n^m(x)$ معرف على المجـال $[-\boldsymbol{m},\boldsymbol{m}]$, ويـأخـذ قيمـه على المجـال $[-1,1]$, وذلك واضح من الصيغة المثلثية, ومنه $|T_n^m(x)|\le 1$:

$$|T_n^m(x)|=1\Rightarrow \cos nt=\pm 1\Rightarrow t=\frac{\pi k}{n} \qquad ;k=0,1,2,.....,n-1$$

$$\Rightarrow x_k=m.\cos\frac{\pi k}{n} \qquad ;k=0,1,...,n-1$$

7) $T_n^m(x)$ تشكل حل للمعادلة التفاضلية:

$$(m^2-x^2)y''-xy'+n^2y=0$$

بما أن $\boldsymbol{T_n(x)}$ تشـكل حل للمعادلة $(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0$ أي أنه يتحقق

$$(1-x^2)\frac{d^2T_n(x)}{d^2x}-x\frac{dT_n(x)}{dx}+n^2T_n(x)=0$$

وباستبدال كل $\boldsymbol{x}$ ب $\frac{x}{m}$

$$(1-(\frac{x}{m})^2)\frac{d^2T_n^m(x)}{d^2(\frac{x}{m})}-\frac{x}{m}\frac{dT_n^m(x)}{d(\frac{x}{m})}+n^2T_n^m(x)=0$$

ومـــنـــه

$$(m^2-x^2)\frac{d^2T_n^m(x)}{d^2x}-x\frac{dT_n^m(x)}{dx}+n^2T_n^m(x)=0$$

8) بعض العلاقات التي تحققها الجملة $\{T_n^m(x)\}$:

$$;n\geq 2$$

$$\int T_n^m(x)dx=\frac{m}{2}\left[\frac{T_{n+1}(x)}{n+1}-\frac{T_{n-1}(x)}{n-1}\right]+c$$

$$(m^2-x^2)T_n'^m=-nxT_n^m(x)+mnT_{n-1}^m(x)\qquad ;n\geq 2$$

$$T_{n+k}^m(x)+T_{|n-k|}^m(x)=2T_n^m(x)T_k^m(x)$$

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}T_k^m(x)T_k^m(y)=\frac{m}{2}\left[\frac{T_{n+1}^m(x)T_n^m(y)-T_n^m(x)T_{n+1}^m(y)}{x-y}\right]$$

$$T_n^m(x)=\sum_{k=0}^{[n/2]}\left((-1)^k\sum_{j=k}^{[n/2]}\binom{n}{2j}\binom{j}{k}\right)\frac{x^{n-2k}}{m^{n-2k}}$$

وتنتج مباشرة من العلاقات (5) (6) (7) (8) (9) باستبدال كل x ب $\frac{x}{m}$

4- الجملة $\left\{ \overset{\alpha}{T}_n(x) \right\}$ $(\alpha = 1,3,5,7,......)$

حيث أن $\overset{\alpha}{T}_n(x)$ تنتج عن $T_n(s)$ بإجراء التحويل $x^{\alpha} = s$ أي أن $\overset{\alpha}{T}_n(x) = T_n(x^{\alpha})$

4-1- خواص الجملة $\left\{ \overset{\alpha}{T}_n(x) \right\}$:

1) الجملة $\left\{ T_n(x) \right\}$ هي حالة خاصـــــة من الجملة $\left\{ \overset{\alpha}{T}_n(x) \right\}$ وذلك من أجل $\alpha = 1$.

2) الجملة $\left\{ \overset{\alpha}{T}_n(x) \right\}$ جملة من كثيرات الحدود المتعامدة على المجال $[-1,1]$ ووزن التعامد $\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\sqrt{1-x^{2\alpha}}}$, وذلك ينتج من العلاقة **(1)** باستبدال كل x ب x^{α} :

(10)

$$\int_{-1}^{1} T_n(x^{\alpha}) T_l(x^{\alpha}) \frac{1}{\sqrt{1-x^{2\alpha}}} dx^{\alpha} = \int_{-1}^{1} \overset{\alpha}{T}_n(x) \overset{\alpha}{T}_l(x) \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\sqrt{1-x^{2\alpha}}} dx = 0$$

حيث $n \neq l$

3) العلاقة التدريجية للجملة $\left\{ \overset{\alpha}{T}_n(x) \right\}$:

$$\overset{\alpha}{T}_{n+1}(x) = 2x^{\alpha} \overset{\alpha}{T}_n(x) - \overset{\alpha}{T}_{n-1}(x)$$

$$\overset{\alpha}{T}_0(x) = 1 \qquad \overset{\alpha}{T}_1(x) = x^{\alpha}$$

تنتج من العلاقة **(4)** باستبدال كل x ب x^{α} :

4) الصيغة المثلثية للجملة $\left\{ \overset{\alpha}{T}_n(x) \right\}$:

$\overset{\alpha}{T}_n(x) = \cos nt$ حيث $x = \sqrt[\alpha]{\cos t}$

تنتج مباشرة من العلاقة **(3)**.

5) أصفار التابع $\overset{\alpha}{T}_n(x)$:

لكثيرة الحدود $\overset{\alpha}{T}_n(x)$ n صـــــفر مختلف على المجال $[-1,1]$ يمكن إيجاد من الصيغة المثلثية ل $\overset{\alpha}{T}_n(x)$:

$$\overset{\alpha}{T}_n(x) = 0 \Rightarrow \cos nt = 0 \Rightarrow t = \frac{(1+2k)}{2n}\pi \qquad ;k = 0,1,....,n-1$$

$$\Rightarrow x_k = \sqrt[\alpha]{\cos\frac{(1+2k)}{2n}\pi} \qquad ;k = 0,1,....,n-1$$

هي أصفار التابع $\overset{\alpha}{T}_n(x)$.

6) القيم العظمى للتابع $\left|\overset{\alpha}{T}_n(x)\right|$:

التـابع $T_n^m(x)$ معرف على المجـال $[-1,1]$, ويـأخـذ قيمـه على المجـال $[-1,1]$, وذلك واضح من الصيغة المثلثية, ومنه $\left|\overset{\alpha}{T}_n(x)\right| \le 1$:

$$\left|\overset{\alpha}{T}_n(x)\right| = 1 \Rightarrow \cos nt = \pm 1 \Rightarrow t = \frac{\pi k}{n} \qquad ;k = 0,1,2,.....,n-1$$

$$\Rightarrow x_k = \sqrt[\alpha]{\cos\frac{\pi k}{n}} \qquad ;k = 0,1,...,n-1$$

7) $\overset{\alpha}{T}_n(x)$ تشكل حل للمعادلة التفاضلية:

$$(1-x^{2\alpha})y'' + \left(\frac{1-\alpha-x^{2\alpha}}{x}\right)y' + \left(n.\alpha.x^{\alpha-1}\right)^2 y = 0 \qquad \textbf{(11)}$$

بما أن $\boldsymbol{T_n(x)}$ تشكل حل للمعادلة $(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0$ أي أنه يتحقق

$$(1-x^2)\frac{d^2T_n(x)}{d^2x}-x\frac{dT_n(x)}{dx}+n^2T_n(x)=0$$

وباستبدال كل $\boldsymbol{x}$ ب x^α :

$$(1-x^{2\alpha})\frac{d^2\overset{\alpha}{T}_n(x)}{d^2x^\alpha}-x^\alpha\frac{d\overset{\alpha}{T}_n(x)}{dx^\alpha}+n^2\overset{\alpha}{T}_n(x)=0$$

$$\frac{d\overset{\alpha}{T}_n(x)}{dx^\alpha}=\frac{1}{\alpha x^{\alpha-1}}\frac{d\overset{\alpha}{T}_n(x)}{dx}$$

$$\frac{d^2\overset{\alpha}{T}_n(x)}{d^2x^\alpha}=\frac{d}{dx^\alpha}\left(\frac{d\overset{\alpha}{T}_n(x)}{dx^\alpha}\right)=\frac{1}{\alpha x^{\alpha-1}}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\alpha x^{\alpha-1}}\frac{d\overset{\alpha}{T}_n(x)}{dx}\right)=$$

$$=\frac{1}{\alpha^2x^{\alpha-1}}\left(\frac{(1-\alpha)}{x^\alpha}\frac{d\overset{\alpha}{T}_n(x)}{dx}+\frac{1}{x^{\alpha-1}}\frac{d^2\overset{\alpha}{T}_n(x)}{d^2x}\right)=\frac{1-\alpha}{\alpha^2}\frac{1}{x^{2\alpha-1}}\frac{d\overset{\alpha}{T}_n(x)}{dx}+\frac{1}{\alpha^2}\frac{1}{x^{2(\alpha-1)}}\frac{d^2\overset{\alpha}{T}_n(x)}{d^2x}$$

وبتعويض العلاقتين السابقتين في المعادلة التفاضلية الأخيرة:

$$(1-x^{2\alpha})\left(\frac{1-\alpha}{\alpha^2}\frac{1}{x^{2\alpha-1}}\frac{d\overset{\alpha}{T}_n(x)}{dx}+\frac{1}{\alpha^2}\frac{1}{x^{2(\alpha-1)}}\frac{d^2\overset{\alpha}{T}_n(x)}{d^2x}\right)-x^\alpha\left(\frac{1}{\alpha x^{\alpha-1}}\frac{d\overset{\alpha}{T}_n(x)}{dx}\right)+n^2\overset{\alpha}{T}_n(x)=0$$

وبالإصلاح:

$$\frac{(1-x^{2\alpha})}{\alpha^2x^{2(\alpha-1)}}\frac{d^2\overset{\alpha}{T}_n(x)}{d^2x}+\left(\frac{1-\alpha}{\alpha^2}.\frac{1-x^{2\alpha}}{x^{2\alpha-1}}-\frac{1}{\alpha}x\right)\frac{d\overset{\alpha}{T}_n(x)}{dx}+n^2\overset{\alpha}{T}_n(x)=0$$

ومنه, $\overset{\alpha}{T}_n(x)$ تشكل حل للمعادلة التفاضلية:

$$\frac{(1-x^{2\alpha})}{\alpha^2x^{2(\alpha-1)}}y''+\left(\frac{1-\alpha}{\alpha^2}.\frac{1-x^{2\alpha}}{x^{2\alpha-1}}-\frac{1}{\alpha}x\right)y'+n^2y=0$$

بضرب الطرفين ب $\alpha^2x^{2(\alpha-1)}$ والإصلاح تنتج المعادلة **(11)**.

8) بعض العلاقات التي تحققها الجملة $\left\{\overset{\alpha}{T}_n(x)\right\}$:

$$\int \overset{\alpha}{T}_n(x)x^{\alpha-1}dx = \frac{1}{2\alpha}\left[\frac{\overset{\alpha}{T}_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{\overset{\alpha}{T}_{n-1}(x)}{n-1}\right] + c \qquad ;n \geq 2$$

$$\frac{1}{\alpha}(x^{1-\alpha} - x^{1+\alpha})\overset{\alpha}{T}'(x) = -nx^{\alpha}\,\overset{\alpha}{T}_n(x) + n\overset{\alpha}{T}_{n-1}(x) \qquad ;n \geq 2$$

$$\overset{\alpha}{T}_{n+k}(x) + \overset{\alpha}{T}_{|n-k|}(x) = 2\overset{\alpha}{T}_n(x)\overset{\alpha}{T}_k(x)$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\overset{\alpha}{T}_k(x)\overset{\alpha}{T}_k(y) = \frac{1}{2}\left[\frac{\overset{\alpha}{T}_{n+1}(x)\overset{\alpha}{T}_n(y) - \overset{\alpha}{T}_n(x)\overset{\alpha}{T}_{n+1}(y)}{x^{\alpha} - y^{\alpha}}\right]$$

$$\overset{\alpha}{T}_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]}\left((-1)^k\sum_{j=k}^{[n/2]}\binom{n}{2j}\binom{j}{k}\right)x^{\alpha(n-2k)}$$

وتنتج مباشرة من العلاقات (5) (6) (7) (8) (9) باستبدال كل x ب x^{α} .

5- الجملة $\left\{\overset{\alpha}{T}{}_n^m(x)\right\}$ حيث $(\alpha = 1,3,5,7,......)$ $(m \in N)$

حيث أن $\overset{\alpha}{T}{}_n^m(x)$ تنتج عن $T_n(s)$ بإجراء التحويل $s = \left(\frac{x}{m}\right)^{\alpha}$ أي أن $\overset{\alpha}{T}{}_n^m(x) = T_n\left(x^{\alpha}/m^{\alpha}\right)$.

5-1- خواص الجملة $\left\{\overset{\alpha}{T}{}_n^m(x)\right\}$:

1) الجملة $\left\{T_n(x)\right\}$ هي حالة خاصـــة من الجملة $\left\{\overset{\alpha}{T}{}_n^m(x)\right\}$, وذلك من أجل $\alpha = 1$, $m = 1$.

2) الجملة $\left\{T_n^m(x)\right\}$ هي حالة خاصـــة من الجملة $\left\{\overset{\alpha}{T}{}_n^m(x)\right\}$, وذلك من أجل $\boldsymbol{\alpha = 1}$.

3) الجملة $\left\{\overset{\alpha}{T}_n(x)\right\}$ هي حالة خاصـــــة من الجملة $\left\{\overset{\alpha}{T}{}_n^m(x)\right\}$, وذلك من أجل $\mathbf{m = 1}$.

4) الجملة $\left\{\overset{\alpha}{T}{}_n^m(x)\right\}$ تنتج من الجملة $\left\{\overset{\alpha}{T}_n(s)\right\}$ بإجراء التحويل $s = \frac{x}{m}$.

5) الجملــة $\left\{\overset{\alpha}{T}{}_n^m(s)\right\}$ جملــة من كثيرات الحــدود المتعــامــدة على المجــال $[-m, m]$, ووزن التعامد $\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\sqrt{m^{2\alpha} - x^{2\alpha}}}$, وذلك ينتج من العلاقة $\mathbf{(11)}$ باستبدال كل $\boldsymbol{x}$ ب $\frac{x}{m}$:

$$\int_{-m}^{m} \overset{\alpha}{T}{}_n^m(x)\overset{\alpha}{T}{}_l^m(x)\frac{\alpha\left(\frac{x}{m}\right)^{\alpha-1}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{m}\right)^{2\alpha}}}d\left(\frac{x}{m}\right) = \int_{-m}^{m} \overset{\alpha}{T}{}_n^m(x)\overset{\alpha}{T}{}_l^m(x)\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\sqrt{m^{2\alpha} - x^{2\alpha}}}dx$$

حيث $\boldsymbol{n \neq l}$

6) الصيغة التدريجية للجملة $\left\{\overset{\alpha}{T}{}_n^m(x)\right\}$:

$$\overset{\alpha}{T}{}_{n+1}^m(x) = 2\left(\frac{x}{m}\right)^\alpha \overset{\alpha}{T}{}_n^m(x) - \overset{\alpha}{T}{}_{n-1}^m(x)$$

$$\overset{\alpha}{T}{}_0^m(x) = 1 \qquad\qquad \overset{\alpha}{T}{}_1^m(x) = \left(\frac{x}{m}\right)^\alpha$$

تنتج من العلاقة **(4)** باستبدال كل x ب $\left(\frac{x}{m}\right)^{\alpha}$.

7) الصيغة المثلثية للجملة $\left\{\overset{\alpha}{T}{}_n^m(x)\right\}$:

$$\overset{\alpha}{T}{}_n^m(x) = \cos nt \qquad \text{حيث} \qquad x = m.\sqrt[\alpha]{\cos nt}$$

تنتج مباشرة من العلاقة **(3)**.

8) أصفار التابع $\overset{\alpha}{T}{}_n^m(x)$:

لكثيرة الحدود $\overset{\alpha}{T}_n(x)$ $\boldsymbol{n}$ صـــفر مختلف على المجال $[-\boldsymbol{m},\boldsymbol{m}]$ يمكن إيجاد من الصيغة المثلثية ل $\overset{\alpha}{T}{}_n^m(x)$:

$$\overset{\alpha}{T}{}_n^m(x) = 0 \Rightarrow \cos nt = 0 \Rightarrow t = \frac{(1+2k)}{2n}\pi \qquad ;k = 0,1,....,n-1$$

$$\Rightarrow x_k = m.\sqrt[\alpha]{\cos\frac{(1+2k)}{2n}\pi} \qquad ;k = 0,1,....,n-1$$

هي أصفار التابع $\overset{\alpha}{T}{}_n^m(x)$.

9) القيم العظمى للتابع $\left|\overset{\alpha}{T}{}_n^m(x)\right|$:

التـابع $T_n^m(x)$ معرف على المجـال $[-\boldsymbol{m},\boldsymbol{m}]$, ويـأخـذ قيمـه على المجـال $[-\mathbf{1},\mathbf{1}]$, وذلك واضح من الصيغة المثلثية, ومنه $\left|\overset{\alpha}{T}{}_n^m(x)\right| \le 1$:

$$\left|\overset{\alpha}{T}_n(x)\right| = 1 \Rightarrow \cos nt = \pm 1 \Rightarrow t = \frac{\pi k}{n} \qquad ;k = 0,1,2,.....,n-1$$

$$\Rightarrow x_k = m.\sqrt[\alpha]{\cos\frac{\pi k}{n}} \qquad ;k = 0,1,...,n-1$$

10) $\overset{\alpha}{T}{}_n^m(x)$ تشكل حل للمعادلة التفاضلية:

$$(m^{2\alpha}-x^{2\alpha})y''+\left(\frac{(1-\alpha)m^{2\alpha}-x^{2\alpha}}{x}\right)y'+\left(n.\alpha.x^{\alpha-1}\right)^2 y=0 \qquad \textbf{(12)}$$

بما أن $\overset{\alpha}{T}_n(x)$ تشكل حل للمعادلة:

$$(1-x^{2\alpha})y''+\left(\frac{1-\alpha-x^{2\alpha}}{x}\right)y'+\left(n.\alpha.x^{\alpha-1}\right)^2 y=0$$

أي أنه يتحقق:

$$(1-x^{2\alpha})\frac{d^2\overset{\alpha}{T}(x)}{d^2x}+\left(\frac{1-\alpha-x^{2\alpha}}{x}\right)\frac{d\overset{\alpha}{T}(x)}{dx}+\left(n.\alpha.x^{\alpha-1}\right)^2\overset{\alpha}{T}(x)=0$$

وباستبدال كل $\boldsymbol{x}$ ب $\dfrac{x}{m}$:

$$(1-\frac{x^{2\alpha}}{m^{2\alpha}})\frac{d^2\overset{\alpha}{T}{}^m(x)}{d^2\frac{x}{m}}+\left(\frac{1-\alpha-\dfrac{x^{2\alpha}}{m^{2\alpha}}}{\dfrac{x}{m}}\right)\frac{d\overset{\alpha}{T}{}^m(x)}{d\frac{x}{m}}+\left(n.\alpha.\frac{x^{\alpha-1}}{m^{\alpha-1}}\right)^2\overset{\alpha}{T}{}^m(x)=0$$

ومنه, وبضرب طرفي المعادلة ب $m^{2\alpha-2}$,والاختصار:

$$(m^{2\alpha}-x^{2\alpha})\frac{d^2\overset{\alpha}{T}{}^m(x)}{d^2x}+\left(\frac{(1-\alpha)m^{2\alpha}-x^{2\alpha}}{x}\right)\frac{d\overset{\alpha}{T}{}^m(x)}{dx}+\left(n.\alpha.x^{\alpha-1}\right)^2\overset{\alpha}{T}{}^m(x)=0$$

ومنه ينتج أن $\overset{\alpha}{T}{}_n^m(x)$ تشكل حل للمعادلة **(12)**.

11) بعض العلاقات التي تحققها الجملة $\left\{\overset{\alpha}{T}{}_n^m(x)\right\}$:

$$;n \geq 2$$

$$\int \overset{\alpha}{T}{}_n^m(x)x^{\alpha-1}dx = \frac{m^\alpha}{2\alpha}\left[\frac{\overset{\alpha}{T}{}_{n+1}^m(x)}{n+1} - \frac{\overset{\alpha}{T}{}_{n-1}^m(x)}{n-1}\right] + c$$

$$;n \geq 2$$

$$\frac{1}{\alpha}(m^{2\alpha}x^{1-\alpha} - x^{1+\alpha})\frac{d\overset{\alpha}{T}{}_n^m(x)}{dx} = -nx^\alpha \overset{\alpha}{T}{}_n^m(x) + m^\alpha n \overset{\alpha}{T}{}_{n-1}^m(x)$$

$$\overset{\alpha}{T}{}_{n+k}^m(x) + \overset{\alpha}{T}{}_{|n-k|}^m(x) = 2\overset{\alpha}{T}{}_n^m(x)\overset{\alpha}{T}{}_k^m(x)$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \overset{\alpha}{T}{}_k^m(x)\overset{\alpha}{T}{}_k^m(y) = \frac{m^\alpha}{2}\left[\frac{\overset{\alpha}{T}{}_{n+1}^m(x)\overset{\alpha}{T}{}_n^m(y) - \overset{\alpha}{T}{}_n^m(x)\overset{\alpha}{T}{}_{n+1}^m(y)}{x^\alpha - y^\alpha}\right]$$

$$\overset{\alpha}{T}_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]}\left((-1)^k \sum_{j=k}^{[n/2]}\binom{n}{2j}\binom{j}{k}\right)\frac{x^{\alpha(n-2k)}}{m^{\alpha(n-2k)}}$$

وتنتج مباشرة من العلاقات (5) (6) (7) (8) (9) باستبدال كل x ب $\left(\frac{x}{m}\right)^\alpha$.

على سبيل المثال نأخذ الجملة $\overset{3}{T}{}_n^2(x)$,والتي سنرمز لها ب $T_n^*(x)$

,وهي جملة متعامدة على المجال $[-2,2]$,ووزن التعامد $\frac{3x^2}{\sqrt{64-x^6}}$,والعلاقة التدريجية لهذه الجملة:

$$T_{n+1}^*(x) = \frac{x^3}{4}T_n^*(x) - T_{n-1}^*(x)$$

$$T_0^*(x) = 1 \qquad T_1^*(x) = \frac{x^3}{8}$$

و $T_n^*(x)$ تشكل حل للمعادلة التفاضلية:

$$(64-x^6)y''-\left(\frac{128+x^6}{x}\right)y'+9.n^2.x^4y=0$$

نوجد الحدود الستة الأولى لهذه الجملة من العلاقة التدريجية:

$$T_0^*(x)=1$$

$$T_1^*(x)=\frac{x^3}{8}$$

$$T_2^*(x)=\frac{x^6}{32}-1$$

$$T_3^*(x)=\frac{x^9}{128}-\frac{3}{8}x^3$$

$$T_4^*(x)=\frac{x^{12}}{512}-\frac{x^6}{8}+1$$

$$T_5^*(x)=\frac{x^{15}}{2048}-\frac{5}{128}x^9+\frac{5}{8}x^3$$

ويمكن كتابة قوى x من مضـــاعفات ال **3** كتركيب خطي لعناصـــر الجملة $\{T_n^*(x)\}$:

$$1=T_0^*(x)$$

$$x^3=8T_1^*(x)$$

$$x^6=32\left(T_0^*(x)+T_2^*(x)\right)$$

$$x^9=128\left(3T_1^*(x)+T_3^*(x)\right)$$

$$x^{12}=512\left(3T_0^*(x)+4T_2^*(x)+T_4^*(x)\right)$$

المراجع العلمية

1) Mason **J.C** Handscombd .**C**. Chebyshev polynomials,Chapman and **Hall/CRC 2003 PP**().

2) Brutman, **L**. (**1988**), Alternating polynomials associated with the Chebyshev

extrema nodes, **J**. Approx. Theory **53, 33–40**.

3) Fox, **L**. (**1962**), Chebyshev methods for ordinary differential equations, Comp.

J. 4, 318–331.

4) Sloan, **I. H**. & Stephan, **E**. **P**. (**1992**), Collocation with Chebyshev polynomials

for Symm's integral equation on an interval, J. Austral. Math. Soc. Ser.

B 34, **199–211**.

5) Rivlin, **T**. **J**. (**1990**), Chebyshev Polynomials: From Approximation Theory to

Algebra and Number Theory, John Wiley, New York. (2nd ed. of Rivlin